GEOMETRIA e ALGEBRA (II Ciclo - Ing. Elettronica) - Docente: F. Flamini SVOLGIMENTO I Esonero

Roma, 25 Gennaio 2007, ore 16:00 – 18,00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare ESCLUSIVAMENTE QUESTI FOGLI. Ogni esercizio vale 10 punti.

---

1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, con coordinate (x_1, x_2, x_3) rispetto alla base canonica E, sia $U \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U. **[1 punto]**.

(ii) Denotato con $U^\perp$ il complemento ortogonale di U in $\mathbf{R}^3$, determinare un'equazione cartesiana per $U^\perp$. **[1 punto]**.

(iii) Utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, estendere la base ortonormale di U determinata nel punto (i) ad una base ortonormale O_1 per $\mathbf{R}^3$. **[4 punti]**.

(iv) Determinare una base ortonormale O_2 per $\mathbf{R}^3$ che sia orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga ad U. **[4 punti]**.

Svolgimento: (i) Osserviamo che U e' una retta vettoriale in $\mathbf{R}^3$. Una sua base si ottiene risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U. Una soluzione e' ad esempio $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$. Percio' una base ortonormale per U e'

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{v}/||\mathbf{v}|| = (3/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}).$$

(ii) Una equazione cartesiana per $U^\perp$ e' per definizione

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

(iii) Una base per $U^\perp$ e' ad esempio data dai vettori $\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)$, che sono manifestamente linearmente indipendenti ed ambedue ortogonali ad U. Consideriamo

$$\mathbf{f}_2 := \mathbf{v}_2/||\mathbf{v}_2|| = (1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}, 0).$$

Ora, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, abbiamo

$$\mathbf{v}_3' := \mathbf{v}_3 - \pi_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 - ((\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)/||\mathbf{v}_2||^2)\mathbf{v}_2 = (3/5, 1/5, 1).$$

Per cui

$$\mathbf{f}_3 := \mathbf{v}_3'/||\mathbf{v}_3'|| = (3/\sqrt{35}, 1/\sqrt{35}, 5/\sqrt{35}).$$

(iv) Sia

$$O_2 = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2\}.$$

Ovviamente prenderemo $\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}_1$ determinato nel punto (i). Sia ad esempio $\mathbf{w} = (1, 1, 2) \in U^\perp$, cosicche'

$$\mathbf{h}_2 := \mathbf{w}/||\mathbf{w}|| = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

Poiche' stiamo operando in $\mathbf{R}^3$, per determinare O_2 basta aggiungere il versore

$$\mathbf{h}_3 := \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = (2/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21}).$$

2. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, E)$, sono dati i tre punti non allineati che, rispetto alla base canonica E, hanno coordinate

$$P = (0, 1), Q = (1, -1), R = (2, 2).$$

(i) Calcolare l' equazione cartesiana della retta l, passante per i punti P e R, e della retta m, passante per i punti P e Q. **[4 punti]**.

(ii) Scrivere l'equazione cartesiana dell'unica circonferenza passante per tre punti dati. **[6 punti]**.

Svolgimento: (i) La retta l per P e R e':

$$x_1 - 2x_2 = -2.$$

Analogamente, la retta m per P e Q e':

$$2x_1 + x_2 = 1.$$

(ii) Il centro della circonferenza da determinare e' il punto C intersezione degli assi delle sue due corde PR e PQ. Percio', il punto medio del segmento PR e' $M = (1, 3/2)$, mentre il punto medio del segmento PQ e' $N = (1/2, 0)$. L'asse del segmento PQ e' la retta per N con vettore direttore un vettore ortogonale al vettore direttore della retta m, cioe'

$$2x_1 - 4x_2 = 1,$$

mentre l'asse del segmento PR e' la retta per M con vettore direttore un vettore ortogonale al vettore direttore di l, cioe'

$$4x_1 + 2x_2 = 7.$$

Il loro punto di interesezione e' il punto C di coordinate $C = (3/2, 1/2)$. Il raggio della circonferenza e' dato da

$$r = d(C, P) = \sqrt{10}/2.$$

Percio', l'equazione della circonferenza voluta si determina con

$$(x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 = 10/4$$

cioe'

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - x_2 = 0.$$

3. Nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O; E)$ e coordinate (x_1, x_2, x_3), siano dati il piano Π, di equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,$$

la retta r, di equazioni cartesiane

$$2x_1 - x_3 = x_2 = 0,$$

ed il punto $P_0 = (1, -1, 0)$.

(i) Determinare le equazioni cartesiane dei piani per P_0 perpendicolari a Π. **[3 punti]**.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana del piano passante per P_0 e che e' perpendicolare a Π e parallelo a r. **[3 punti]**.

(iii) Determinare un'equazione cartesiana della retta r' ottenuta come proiezione ortogonale della retta r sul piano Π. **[4 punti]**.

Svolgimento: (i) Detta n la retta perpendicolare a Π e passante per P_0, i piani richiesti sono i piani del fascio di asse n. La retta n ha vettore direttore $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$, percio' la retta n ha equazioni cartesiane

$$x_1 + x_2 = 2x_1 - x_3 - 2 = 0.$$

Quindi, i piani cercati sono i piani dati da

$$\lambda(x_1 + x_2) + \mu(2x_1 - x_3 - 2) = 0,$$

cioe'

$$(\lambda + 2\mu)x_1 + \lambda x_2 - \mu x_3 = 2\mu, \ \forall \ (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

(ii) Il piano richiesto, e' il piano passante per P_0 ed avente come piano direttore il piano vettoriale determinato dai vettori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{r} = (1, 0, 2)$, dove $\mathbf{r}$ e' il vettore direttore della retta r. Tale piano ha quindi equazione cartesiana

$$2x_1 - x_3 = 2.$$

(iii) La retta r' sara' l'intersezione del piano Π e dell'unico piano α, appartenente al fascio di asse r, che e' perpendicolare a Π. Il fascio di piani in $\mathbf{R}^3$ di asse r ha equazione

$$2\lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda x_3 = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Un vettore normale a Π e' $\mathbf{n}_\Pi = (1, -1, 2)$ mentre un vettore normale del generico piano del fascio e' $\mathbf{n}_{\lambda,\mu} = (2\lambda, \mu, -\lambda)$. percio' porremo

$$\mathbf{n}_\Pi \cdot \mathbf{n}_{\lambda,\mu} = 0$$

che fornisce la relazione lineare $\mu = 0$. In definitiva, r' sara' data dal sistema di equazioni:

$$2x_1 - x_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0.$$