Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Elettronica

Terzo Appello del corso di **Geometria e Algebra**
II Parte - Docente F. Flamini, Roma, 17/09/2007

SVOLGIMENTO COMPITO III APPELLO / RECUPERI

LEGENDA

Recupero I Parte: svolgere esercizi 1), 2) e 3).
Recupero II Parte: svolgere esercizi 4), 5) e 6).
II Appello: svolgere esercizi 2), 4) e 6).

Esercizio 1. [10 punti] Sia $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Sia

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}$$

il sottospazio definito in equazioni cartesiane.
(i) Determinare una base ortonormale di U.
(ii) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio U, ed una sua base ortonormale.
Svolgimento: (i) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U, cioe':

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$

Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Quindi una base ortonormale e' data da $f_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(ii) $U^\perp$ e' costituito da tutti i vettori $\underline{t} = (x_1, \dots, x_4)$ tali che $\underline{t} \cdot \underline{u} = 0$, $\forall\ \underline{u} \in U$, cioe' tali che risulti:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U. Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$u_2 = (1, 0, -1, 0), \;\; u_3 = (0, 1, 0, 0), \;\; u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = Span(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. La base ortonormale si puo' estrarre direttamente dalla precedente. Infatti basta prendere

$$f_2 = u_2/||u_2||, \;\; f_3 = u_3, \;\; f_4 = u_4.$$

Esercizio 2. [10 punti] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e coordinate (x_1, x_2), sono dati i tre punti non allineati di coordinate, rispetto ad $\mathcal{E}$,:

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti dati. **[7 punti]**
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$. **[1 punto]**
(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $R \in \mathcal{C}$. **[4 punti]**
Svolgimento: (i) Il centro della circonferenza da determinare e' il punto C intersezione degli assi delle due corde $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. Percio', il punto medio di $\overline{PQ}$ e' $M_{PQ} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre il punto medio di $\overline{QR}$ e' $M_{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Invece, la direzione del vettore $\vec{PQ} = (-1, 2)$, mentre la direzione del vettore $\vec{QR} = (-2, -2) = (1, 1)$.

Quindi, l'asse del segmento $\overline{PQ}$ e' la retta per M_{PQ} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{PQ}$, per esempio $(2, 1)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e' quindi:

$$2x_1 - 4x_2 + 3 = 0.$$

Analogamente, l'asse del segmento $\overline{QR}$ e' la retta per M_{QR} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{QR}$, per esempio $(-1, 1)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e':

$$x_1 + x_2 - 3 = 0.$$

Il loro punto di intersezione e' il punto C di coordinate $C = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Il raggio della circonferenza e' dato da

$$r = d(C, R) = \sqrt{10}/2.$$

Percio', l'equazione della circonferenza voluta si determina con

$$(x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 3/2)^2 = 10/4.$$

Quindi

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 2 = 0.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare il centro ed il raggio determinati al punto (i).
(iii) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in R e' data dalla formula

$$(0 - 3/2)(x_1 - 0) + (1 - 3/2)(x_2 - 1) = 0$$

cioe':

$$3x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Esercizio 3. **[10 punti]** Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$, sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Se r e' la retta ottenuta intersecando il piano π con il piano α di equazione cartesiana

$$x_1 + x_3 = 3,$$

determinare equazioni cartesiane della retta r' che e' la proiezione ortogonale di r su π_1.

Svolgimento: Il fascio di piani in $\mathbb{R}^3$ di asse la retta r ha equazione

$$(\lambda + \mu)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + \mu)x_3 - 3\mu = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

La retta r' sara' intersezione del piano π_1 e dell'unico piano β del fascio che e' ortogonale a π_1. Dunque, poiche' un vettore normale a π_1 e' il vettore $\mathbf{n}_{\pi_1} = (1, 2, 0)$ e poiche' un vettore normale al generico piano del fascio e' $\mathbf{n}_{\lambda\mu} = (\lambda + \mu, \lambda, 2\lambda + \mu)$, imponiamo la condizione

$$\mathbf{n}_{\pi_1} \cdot \mathbf{n}_{\lambda\mu} = 0$$

che fornisce la relazione lineare

$$3\lambda + \mu = 0.$$

Quindi il piano β ha equazione cartesiana $2x_1 - x_2 + x_3 - 9 = 0$ e quindi le equazioni cartesiane di r' sono:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 = & 9 \\ x_1 & +2x_2 & = & 1. \end{cases}$$

Esercizio 4. **[10 punti]** Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), e' data la conica euclidea C di equazione cartesiana

$$C: \ x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 12x_2 + 9 = 0.$$

(i) Ridurre la conica C a forma canonica metrica D. Stabilire la classificazione metrica di C e trovare esplicitamente l'equazione di D e l'isometria che trasforma C in D. **[8 punti]**

(iii) Disegnare C nel riferimento (x_1, x_2) di partenza. **[2 punti]**.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della conica C e' la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(Q) = 0$, allora sicuramente C apparterra' alla famiglia delle parabole. Il polinomio caratteristico di Q e'

$$det(Q - tI) = t(t - 5).$$

Tali autovalori forniscono quindi la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di Q:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

La relativa trasformazione di coordinate e' quindi

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di C, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano Q, si trova rapidamente che l'equazione della conica C in tali coordinate diventa

$$5y_2^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}y_2 + 9 = 0.$$

Poiche' il coefficiente di y_1 e' nullo, consideriamo la traslazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ e $\mathbf{c} = (0, \beta)$ con β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di C' si ottiene che con $\beta = 3/\sqrt{5}$ l'equazione della conica diventa

$$5z_2^2 = 0.$$

Dividendo tutto per 5, si ottiene che C e' una parabola doppiamente degenere e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) e'

$$D: \quad z_2^2 = 0.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta C in D e' data da

$$x_1 = 2/\sqrt{5}z_1 - 1/\sqrt{5}z_2 - 3/5, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}z_1 + 2/\sqrt{5}z_2 + 6/5.$$

(ii) Per disegnare C, basta usare l'isometria inversa, da cui si ottiene che C e' la retta $x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ contata due volte.

Esercizio 5. [10 punti] Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T.
(ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.
(iii) Dedurre la forma canonica di Sylvester di Q, determinando esplicitamente la segnatura di Q.
Svolgimento: (i) La matrice della forma quadratica Q coincide con A. Quindi Q ha equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$x_2 = x_3 - x_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$x_1 = x_3 + x_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A. Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$O := \{(1,0,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base O. Questo significa che la forma quadratica Q in tale base ha, rispetto alle opportune coordinate, equazione

$$Q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

(iii) Ovviamente la base O e' gia' una base di Sylvester, data la forma di Q. La segnatura di Q e' ovviamente $(2, -2)$, come si deduceva gia' dal segno degli autovalori di A.

Esercizio 6. **[10 punti]** Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_3 = 1.$$

(ii) Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Q ha rango 1. Facilmente si vede che la quadrica Q contiene punti reali, per esempio $(0,0,1)$. Il piano tangente in $(0,0,1)$ ha equazione

$$x_1 + 1(x_3 - 1) = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Q, si ottiene

$$x_1 + x_3 - 1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

cioe'

$$x_1 + x_3 - 1 = (x_1 + x_2)^2 = 0$$

che e' l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte, cioe' e' una retta contata due volte. Quindi Q e' un cilindro parabolico. La sua forma canonica affine e', in un opportuno riferimento,

$$X_1^2 = X_2.$$