GEOMETRIA e ALGEBRA (II Ciclo - Ing. Elettronica) - Docente: F. Flamini

SVOLGIMENTO I APPELLO

Roma, 22 Febbraio 2007, ore 9:00 – 11,00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare ESCLUSIVAMENTE QUESTI FOGLI.

1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, si consideri $W \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1)$, e $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 1)$.
   (i) Utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, determinare una base ortonormale di W. **[4 punti]**.
   (ii) Estendere la base trovata al punto (i) ad una base ortonormale per $\mathbf{R}^3$ che sia orientata positivamente. **[2 punti]**.
   (iii) Determinare equazioni cartesiane ed una base ortonormale per $W^\perp$, il complemento ortogonale di W. **[2 punti]**.

   Svolgimento: (i) I vettori dati sono linearmente indipendenti. Quindi W e' un piano vettoriale di $\mathbf{R}^3$ ed i due vettori costituiscono una sua base. Tale base non e' ortonormale, dato che $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 2 \neq 0$. Come primo versore della base ortonormale prendiamo

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{w}_1/||\mathbf{w}_1|| = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Ora, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, consideriamo

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \pi_{\mathbf{f}_1}(\mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_2 - (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{f}_1 = (-2/3, 1/3, 1/3).$$

Percio', poiche'

$$||\mathbf{u}_2|| = \sqrt{6}/3,$$

allora il secondo vettore della base cercata per W sara'

$$\mathbf{f}_2 := \mathbf{w}_2/||\mathbf{w}_2|| = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}).$$

(ii) Per estendere la base di W data da $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente, basta considerare allora

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

(iii) Una equazione cartesiana per $W^\perp$ e' per definizione

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ovviamente una base ortonormale per $W^\perp$ e' proprio il vettore $\mathbf{f}_3$ trovato precedentemente.

2. Nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia $\pi \subset \mathbf{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

e sia $l \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$l : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto a π. **[6 punti]**.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta $m \subset \mathbf{R}^3$, che e' la retta ottenuta per riflessione della retta l rispetto al piano π. **[4 punti]**.

Svolgimento: (i) Sia $p = (a, b, c)$ il punto generico di $\mathbf{R}^3$. Un vettore normale al piano π e' il vettore $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$. Pertanto la retta r, passante per p e perpendicolare a π, ha equazione parametrica vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$x_1 = a + 2t, \quad x_2 = b - t, \quad x_3 = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con π, si ottiene il valore

$$t_0 = (4 + b - c - 2a)/6.$$

Quindi, se $S_\pi(p)$ denota il simmetrico di p rispetto a π, esso si ottiene come punto sulla retta r, corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\pi(p) = (a, b, c) + ((4 + b - c - 2a)/3) \ (2, -1, 1).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a π sono

$$S_\pi((a, b, c)) = (-a/3 + 2b/3 - 2c/3 + 8/3, \ 2a/3 + 2b/3 + c/3 - 4/3, \ -2a/3 + b/3 + 2c/3 + 4/3).$$

(ii) Prendiamo due punti su l, ad esempio $R = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, -1, -1)$. Dalle formule di simmetria precedenti, si ha che

$$S_\pi(R) = (5/3, -1/3, 4/3) \quad S_\pi(Q) = (8/3, -7/3, 5/3).$$

Percio', un vettore direttore di m e' dato da

$$S_\pi(Q) - S_\pi(R) = (1, -2, -1).$$

Allora, l'equazione parametrica vettoriale di m e' data da $\mathbf{x} = (5/3, -1/3, 4/3) + t(1, -2, -1)$ e quindi le equazioni parametriche scalari sono

$$x_1 = 5/3 + t, \quad x_2 = -1/3 - 2t, \quad x_3 = 4/3 - t.$$

Queste determinano le equazioni cartesiane di m che sono, ad esempio

$$m : \begin{cases} x_1 + x_3 - 3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \end{cases}.$$

3. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), e' data la conica euclidea di equazione cartesiana

$$C: \; 7x_1^2 - 10\sqrt{3}x_1x_2 - 3x_2^2 + 12\sqrt{3}x_1 - 12x_2 - 12 = 0.$$

(i) Ridurre la conica C a forma canonica metrica D. Stabilire la classificazione metrica di C e trovare esplicitamente l'equazione di D e l'isometria che trasforma C in D. **[6 punti]**.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica C. **[4 punti]**.

(iii) DisegnaScegliendo $\alpha = -1$ allora l'equazione della conica diventa

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 6$$

e quindi $\mathbf{c} = (-1, 0)$. re C nel riferimento (x_1, x_2) di partenza. **[2 punt1]**.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della conica C e' la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(Q) = -96 < 0$, allora C appartiene alla famiglia delle iperboli. Il polinomio caratteristico di Q e'

$$det(Q - tI) = t^2 - 4t - 96$$

che ha soluzioni

$$t_1 = 12 \quad t_2 = -8.$$

Il primo autovettore, relativo al primo autovalore $t_1 = 12$, si determina considerando il sistema

$$\begin{cases} 7\alpha - 5\sqrt{3}\beta = 12\alpha \\ -5\sqrt{3}\alpha - 3\beta = 12\beta \end{cases}$$

che fornisce l'autovettore $(\sqrt{3}, -1)$. Quindi, per il teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ costituita da autovettori di Q e' ad esempio la base

$$\mathbf{f}_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2), \quad \mathbf{f}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$$

scelta in modo tale che sia orientata positivamente. La matrice che trasforma i vettori della base canonica nei vettori di questa nuova base ortonormale e'

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

che e' pertanto ortogonale. La trasformazione di coordinate e' quindi

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y},$$

cioe'

$$x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di C, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano Q, si trova rapidamente che l'equazione della conica C in tali coordinate diventa

$$12y_1^2 - 8y_2^2 + 24y_1 - 12 = 0.$$

Dividendo tutta l'equazione per 4, studiamo quindi la conica

$$C' : 3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_1 - 3 = 0.$$

Poiche' il coefficiente di y_2 e' nullo, consideriamo la traslazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ e $\mathbf{c} = (\alpha, 0)$ con α da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di C' si ottiene

$$3z_1^2 - 2z_2^2 + 6(1 + \alpha)z_1 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = -1$ allora l'equazione della conica diventa

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 6$$

e quindi

$$\mathbf{c} = (-1, 0).$$

Dividendo tutto per 6, si ottiene che C e' un'iperbole generale a punti reali e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) e'

$$D : \quad z_1^2/2 - z_2^2/3 = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta C in D e' data da

$$\mathbf{x} = M(\mathbf{z} + \mathbf{c}) = M\mathbf{z} + M\mathbf{c}.$$

Visto che $M\mathbf{c} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$, le equazioni della isometria sono

$$x_1 = \sqrt{3}/2z_1 + 1/2z_2 - \sqrt{3}/2, \quad x_2 = -1/2z_1 + \sqrt{3}/2z_2 + 1/2.$$

(ii) Gli asintoti della forma canonica D sono le rette di equazioni cartesiane

$$\sqrt{3}z_1 - \sqrt{2}z_2 = 0, \quad \sqrt{3}z_1 + \sqrt{2}z_2 = 0$$

il centro di simmetria e' il punto $(z_1, z_2) = (0, 0)$, l'asse di simmetria intersecato da D e' $z_2 = 0$ mentre l'asse di simmetria non intersecato da D e' $z_1 = 0$.
Dalle formule $\mathbf{x} = M\mathbf{z} + M\mathbf{c}$, troviamo che il centro di simmetria di C e' quindi $\mathbf{x} = M\mathbf{c} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ che si ottiene per il valore di $\mathbf{z} = (0, 0)$. Sempre dalla relazione precedente e ricordando che M e' una matrice ortogonale, si ottiene la relazione inversa

$$\mathbf{z} = M^t\mathbf{x} - \mathbf{c}$$

cioe' $z_1 = \sqrt{3}/2x_1 - 1/2x_2 + 1, \quad z_2 = 1/2x_1 + \sqrt{3}/2x_2$.Pertanto, i due asintoti di C sono, rispettivamente,

$$(3 - \sqrt{2})x_1 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})x_2 + 2\sqrt{3} = 0, \quad (3 + \sqrt{2})x_1 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})x_2 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Analogamente, l'asse di simmetria che non viene intersecato da C e'

$$\sqrt{3}x_1 - x_2 + 2 = 0,$$

mentre quello che viene intersecato da C e'

$$x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0.$$

(iii) Per disegnare precisamente C basta vedere quali sono le coordinate (x_1, x_2) dei punti che corrispondono ai punti, che nel riferimento (z_1, z_2), avevano coordinate $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$; infatti questi erano i punti in cui la conica D intersecava il suo asse (reale) di simmetria. Tali punti, nel riferimento iniziale (x_1, x_2) hanno coordinate, rispettivamente,

$$(\sqrt{3}/2(\sqrt{2} - 1), 1/2(1 - \sqrt{2})), \quad (-\sqrt{3}/2(\sqrt{2} + 1), 1/2(1 + \sqrt{2})).$$