

1. Sia dato il sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} x - y + 3z - 2w = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z - w = 4. \end{cases}$$

- (i) Determinare la soluzione generale.
 (ii) Dire se si tratta di un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .

2. Siano dati i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}\right\}.$$

- (i) Determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $U \cap W$ di \mathbb{R}^4 .
 (ii) Determinare $U \cap W$ ed esibirne una base.
 (iii) Determinare $\dim(U + W)$.

3. Sia $M(2, 2, \mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

- (i) Esibire una base di $M(2, 2, \mathbb{R})$ e determinare $\dim M(2, 2, \mathbb{R})$.
 (ii) Dire se $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $M(2, 2, \mathbb{R})$.
 (iii) Far vedere che $U = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, \mathbb{R})$.
 (iv) Esibire una base di U e determinare $\dim U$.
 (v) Determinare se $V = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 2 & a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, \mathbb{R})$.
 (vi) Determinare se $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartengono a U o a V .

4. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di \mathbb{R}^n . Calcolare le coordinate dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ nella base \mathcal{B} .

5. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 . Calcolare le coordinate dei vettori

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

nelle basi

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

6. Calcolare le coordinate dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ nella base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^4

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare se sono linearmente indipendenti usando la definizione.
(ii) Determinare la dimensione del sottospazio che generano ed esibirne una base.
8. Costruire due matrici A, B 3×2 , tali che il sistema lineare omogeneo in due incognite associato ad A abbia il vettore nullo come unica soluzione, mentre il sistema lineare omogeneo in tre incognite associato a B abbia soluzioni non banali.
9. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare se i sottoinsiemi

$$\{u, v\}, \{u, w\}, \{u, z\}, \{v, w\}, \{v, z\}, \{w, z\}$$

sono tutti linearmente indipendenti.

- (ii) Se sì, questo implica che $\{u, v, w, z\}$ sono linearmente indipendenti?

10. Siano dati 3 vettori in \mathbb{R}^5 . Spiegare perché non possono essere una base di \mathbb{R}^5 .
11. Siano dati 6 vettori in \mathbb{R}^5 . Spiegare perché non possono essere una base di \mathbb{R}^5 .
12. Scrivere quattro vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in \mathbb{R}^3 in modo che $U = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ abbia dimensione due ed esibire un vettore w che non appartiene ad U .
13. Scrivere due sottospazi U e V in \mathbb{R}^4 con $\dim U = 2$, $\dim V = 3$ e $\dim U \cap V = 2$. Quanto vale $\dim U + V$?
14. Dare un esempio di un sottoinsieme S in \mathbb{R}^2 , che contiene l'elemento $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma che non è un sottospazio vettoriale.