1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 16(a), 17, 18, 19.

2. Determinare le dimensioni dei seguenti sottospazi W ed esibirne due basi basi diverse, quando è possibile:

(i) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^5;$

(ii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^4;$

(iii) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases} \} \quad \subset \mathbf{R}^3.$

(iv) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(v) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^3;$

(vi) $W = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^2.$

3. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 0\} \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \};$$

esibirne una base.

4. Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \qquad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & = 0 \end{cases} \}.$$

esibirne una base.

5. Dimostrare che le seguenti terne di vettori sono basi di $\mathbf{R}^3$

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \}.$$

Calcolare le coordinate dei vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in ognuna di esse.

6. Verificare che
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \} \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$
In quanti modi si può scrivere $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \}$?
Verificare che
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \in \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$
In quanti modi si può scrivere $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$?
Spiegare i risultati.

7. Determinare due basi a piacere dello spazio delle matrici
$$M(2,2,\mathbf{R}) = \{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbf{R} \};$$
che dimensione ha $M(2,2,\mathbf{R})$?
Calcolare le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ in ognuna delle basi scelte.

8. Sia $U = \{ M \in M(2,2,\mathbf{R}) \mid M^t = M \}$ il sottoinsieme delle matrici simmetriche 2×2 (qui M^t indica la trasposta di M).
Determinare 4 elementi di U.
Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.
Determinare una base di U e calcolare la sua dimensione.
Determinare le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ nella base scelta.

9. Sia $U = \{ M \in M(2,2,\mathbf{R}) \mid M^t = -M \}$ il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche 2×2 (qui M^t indica la trasposta di M).
Determinare 4 elementi di U.
Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $M(2,2,\mathbf{R})$.
Determinare una base di U e calcolare la sua dimensione.
Determinare le coordinate della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ nella base scelta.