1. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. determinare quali dei seguenti vettori sono autovettori di A:
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$
Far vedere che 7 è autovalore di A e determinare l'autospazio corrispondente.

4. Senza calcoli trovare un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Senza calcoli trovare un autovalore λ di $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ e due autovettori linearmente indipendenti in V_λ.

6. Sia A una matrice e sia $\mathbf{x}$ un autovettore di A di autovalore λ. Calcolare $A\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, $A^n\mathbf{x}$.

7. Data $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dire se $\lambda = 5$ è autovalore di A.

8. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti. Dire quali matrici sono diagonalizzabili.

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Dire quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile, spiegando perché:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. Sia A la matrice 6×6

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Far vedere che $\lambda = 2$ è autovalore di A. Determinare la dimensione dell'autospazio corrispondente.
(ii) Determinare il polinomio caratteristico di A.

13. Determinare se le seguenti matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Determinare se le seguenti coppie di matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

16. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

18. Apostol, Sezione 6.8, Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8,10.