1. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $F(X) = A \cdot X$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

formano una base per $\mathbf{R}^3$.

(ii) Calcolare la matrice di F rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ in dominio e codominio.

2. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

Sia $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$.

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad A(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$

(ii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(iii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(iv) Calcolare la matrice di A^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

3. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

4. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \ \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \ \mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

5. Sia

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

e sia $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che $A(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.

Sia $A_{|V}$ l'applicazione A *ristretta* a V.

(ii) Trovare una base per V.

(iii) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $A_{|V}$ rispetto a questa base.

6. Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \right\}$$

sia $F : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare $X \mapsto AX$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora $F(\mathbf{x}) \in V$.

(ii) Determinare una base per V e calcolare la matrice rappresentativa dell' applicazione F ristretta a V

$$F_{|V} : V \longrightarrow V$$

rispetto a questa base.

(iii) Calcolare il nucleo e l'immagine della applicazione $F_{|V}$.

7. Sia A la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base standard di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 0, \\ Ae_i &= e_{i-1}, \qquad \text{per ogni } i > 1. \end{aligned}$$

(ii) Calcolare A^2.

(iii) Per ogni $n > 0$ calcolare A^n e determinarne il nucleo e l'immagine.

8. Sia $M(2, 2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Sia

$$F \colon M(2, 2, \mathbf{R}) \longrightarrow M(2, 2, \mathbf{R}), \quad M \mapsto {}^tM$$

l'applicazione che associa ad una matrice la sua trasposta.

(i) Far vedere che F è lineare.

(ii) Scegliere una base in $M(2, 2, \mathbf{R})$ e determinare la matrice rappresentativa di F rispetto a quella base in dominio e codominio.