1. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix},$$

e siano dati i sottospazi

$$U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \qquad W = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e dire se F è iniettiva.
(ii) Determinare l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$, esibendone una base.
(iii) Calcolare $\dim U$, $U \cap \ker F$, $\dim F(U)$, esibire una base di $F(U)$.
(iv) Calcolare $\dim W$, $W \cap \ker F$, $\dim F(W)$, esibire una base di $F(W)$.
(v) Spiegare i risultati ottenuti in (iii) e (iv).

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e $\mathrm{Im}(F)$ esibendone delle basi.
(ii) È possibile determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 2, tale che $\dim U = \dim F(U)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.
(iii) È possibile determinare un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 1, tale che $\dim W = \dim F(W)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.

3.
(i) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(ii) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(iii) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
(iv) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare, tale che

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix})$.