Versione preliminare
6 dicembre 2018

II Università degli Studi di Roma
TOR VERGATA

Dispense di Geometria. Capitolo 3.

8. Quadriche in $\mathbf{R}^3$.

In questo paragrafo studiamo le quadriche in $\mathbf{R}^3$.

Definizione. *Una quadrica in $\mathbf{R}^3$ è l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che soddisfano un'equazione di secondo grado*

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + jx_3 + k = 0,$$

dove $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k \in \mathbf{R}$, con a, b, c, d, e, f non tutti nulli.

Come le coniche di $\mathbf{R}^2$, anche le quadriche di $\mathbf{R}^3$ possono avere forme geometriche diverse. Diamo ora un metodo per determinare la struttura geometrica di una quadrica data. Il procedimento è simile a quello seguito nel paragrafo 7 nello studio delle coniche. Alla parte quadratica dell'equazione della quadrica

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

associamo la matrice simmetrica 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix},$$

così da scrivere

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\rangle = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice A è simmetrica, esiste una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A. La matrice del cambiamento di base, dalla base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, è una matrice ortogonale M, contenente i vettori $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ nelle sue colonne. La matrice M ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = {}^tMAM = A',$$

ove A' è una matrice diagonale, avente sulla diagonale gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ di A.

Se $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ sono le coordinate indotte dalla base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \langle A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle AM \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle M^{-1}AM \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle A' \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \rangle = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \end{aligned}$$

Dunque, mediante il cambiamento di coordinate (1) otteniamo un'equazione senza termini "misti" di secondo grado

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2 + g' x_1' + h' x_2' + j' x_3' + k' = 0. \tag{2}$$

Come nel caso delle coniche, procediamo adesso alla semplificazione dei termini di grado uno e di grado zero dell'equazione (2). Poiché il numero dei casi da trattare è rilevante, li suddividiamo in 5 famiglie, e per ognuna di esse discutiamo i relativi sottocasi. Alla fine, avremo 17 tipi diversi di quadriche!

La suddivisione è basata sul *rango della matrice* A, ossia il numero di autovalori non nulli di A, ed *il segno degli autovalori di* A.

Le 5 famiglie sono le seguenti:

I. Il rango di A è uguale a 3 ed i 3 autovalori hanno lo stesso segno.
II. Il rango di A è uguale a 3 ed i 3 autovalori non hanno lo stesso segno.
III. Il rango di A è uguale a 2 ed i 2 autovalori non nulli hanno lo stesso segno.
IV. Il rango di A è uguale a 2 ed i 2 autovalori non nulli non hanno lo stesso segno.
V. Il rango di A è uguale a 1.

I. Moltiplicando eventualmente l'equazione (2) per -1, possiamo assumere che i coefficienti λ_i siano positivi. In questo caso possiamo eliminare i termini lineari tramite una traslazione. Più precisamente, sia

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'' - \frac{g'}{2\lambda_1} \\ x_2'' - \frac{h'}{2\lambda_2} \\ x_3'' - \frac{j'}{2\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Con questa sostituzione, l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + \lambda_3(x_3'')^2 = k''.$$

A questo punto ci sono tre possibilità:

1. $k'' > 0$. In questo caso, la quadrica è un'*ellissoide.*
2. $k'' = 0$. In questo caso, abbiamo $x_1'' = x_2'' = x_3'' = 0$ e la quadrica consiste nel punto $(0,0,0)$.
3. $k'' < 0$. In questo caso la quadrica non ha punti.

II. Possiamo assumere $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Anche in questo caso, possiamo eliminare i termini lineari tramite una traslazione e ridurre l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + \lambda_3(x_3'')^2 = k''.$$

Anche questa volta ci sono tre possibilità:

4. $k'' > 0$. In questo caso la quadrica è un *iperboloide ad una falda.*
5. $k'' = 0$. In questo caso la quadrica è un *cono.*
6. $k'' < 0$. In questo caso la quadrica è un *iperboloide a due falde.*

III. Possiamo supporre $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$. Mediante una traslazione, possiamo eliminare i termini lineari che contengono x_1' e x_2'. L'equazione diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + j''x_3'' = k''.$$

7. Se il coefficiente j'' non è nullo, possiamo eliminare il termine noto con una traslazione, riducendo l'equazione nella forma

$$\lambda_1(x_1''')^2 + \lambda_2(x_2''')^2 + j''x_3''' = 0.$$

La quadrica è un *paraboloide ellittico.*

Se $j'' = 0$, cioè l'equazione è della forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 = k'',$$

ci sono tre possibilità:

8. Se $k'' > 0$, la quadrica è un *cilindro ellittico.*
9. Se $k'' = 0$, allora $x_1'' = x_2'' = 0$ e la quadrica coincide con l'asse x_3''.
10. Se $k'' < 0$, allora la quadrica non ha punti.

IV. Possiamo supporre $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$. Con una traslazione, possiamo eliminare i termini lineari che contengono x_1' e x_2'. L'equazione diventa così

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + j''x_3'' = k''.$$

11. Se $j'' \neq 0$ possiamo eliminare il termine noto tramite una traslazione. La quadrica è una *sella.*
12. Se $j'' = 0$ ma $k'' \neq 0$, allora la quadrica è un *cilindro iperbolico.*
13. se $j'' = k'' = 0$, allora la quadrica è l'unione dei due piani incidenti aventi equazioni $x_1'' = \pm\sqrt{-\lambda_2/\lambda_1} \cdot x_2''$.

V. Possiamo supporre che λ_1 sia l'unico autovalore non nullo e che sia positivo. Con una traslazione, possiamo eliminare il termine lineare in x_1'. L'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + h''x_2'' + j''x_3'' = k''.$$

14. Se h'', j'' non sono entrambi nulli, mediante il cambiamento di coordinate ortogonale

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j''/\sqrt{j''^2 + h''^2} & h''/\sqrt{j''^2 + h''^2} \\ 0 & -h''/\sqrt{j''^2 + h''^2} & j''/\sqrt{j''^2 + h''^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix},$$

l'equazione della quadrica diventa $\lambda_1(x_1''')^2 + h'''x_3''' = k''$, dove $h''' \neq 0$. Dopo l'eliminazione del termine noto, con una traslazione, troviamo infine

$$\lambda_1(\tilde{x}_1)^2 + \tilde{h}\tilde{x}_3 = 0.$$

La quadrica è un *cilindro parabolico.*
Se $h'' = j'' = 0$, cioè l'equazione è della forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 = k'',$$

ci sono tre casi:

15. Se $k'' > 0$, la quadrica è l'unione dei due piani paralleli di equazioni $x'' = \pm\sqrt{k''/\lambda_1}$.
16. Se $k'' = 0$, la quadrica è l'unione di due piani coincidenti, di equazione $x_1'' = 0$.
17. se $k'' < 0$, la quadrica non ha punti.

Osservazione. Dalla discussione precedente, risulta che, mediante un *cambiamento di coordinate isometrico*, un'equazione di secondo grado nello spazio può essere portata in una e una sola delle 17 forme individuate. Il procedimento descritto si chiama "riduzione della quadrica a forma canonica metrica" e la classificazione prodotta è la "classificazione metrica delle quadriche".

Forma canonica affine di una conica o di una quadrica. Come la riduzione in forma canonica metrica, la riduzione in forma canonica affine di una conica o di una quadrica consiste nella ricerca di un sistema di riferimento rispetto al quale l'equazione che la definisce risulti "più semplice possibile". In questo caso, i cambiamenti di coordinate ammessi non sono necessariamente isometrie, ma trasformazioni affini qualunque

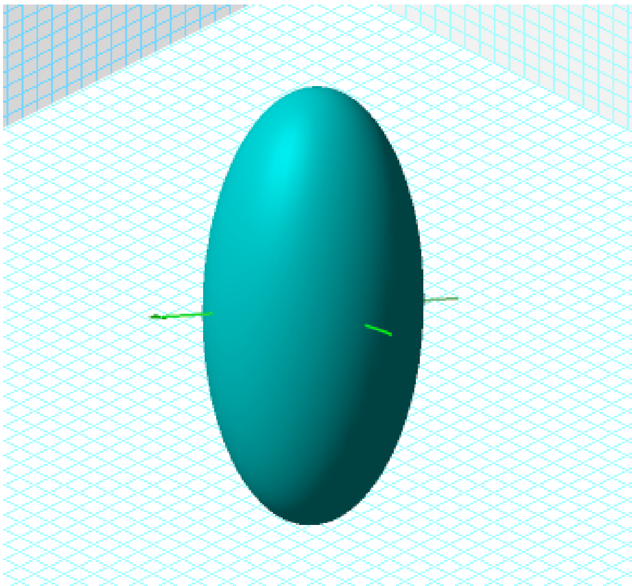
$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove A è una matrice invertibile e $\mathbf{b}$ è un vettore. Ad esempio, si ammettono anche le dilatazioni.

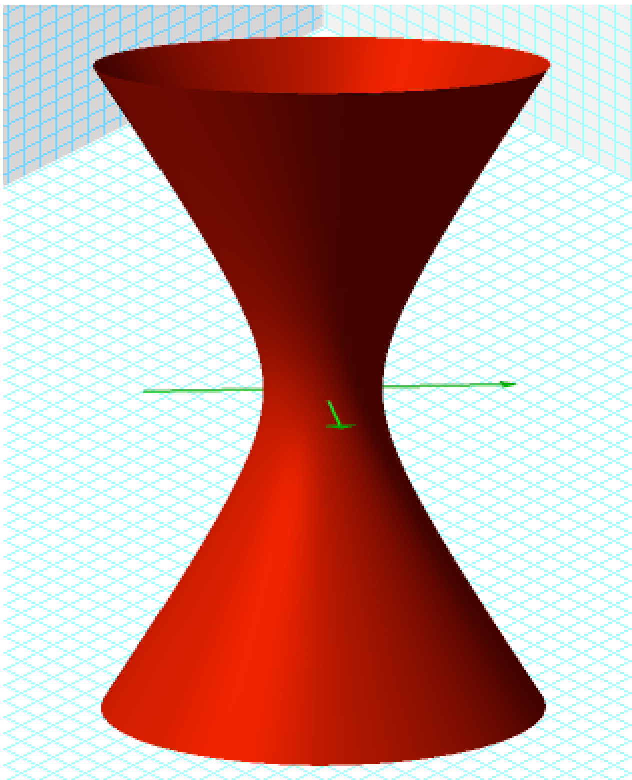
Si può dimostrare che, tramite cambiamenti di coordinate affini, l'equazione di una conica o di una quadrica può essere trasformata in una equazione i cui coefficienti siano uguali a $1, -1$ o 0, a seconda del segno o della nullità dei corrispondenti coefficienti nell'equazione canonica metrica. Questa equazione prende il nome di "equazione canonica affine" della conica o della quadrica. È facile verificare che essa può essere ottenuta, mediante una opportuna dilatazione, dall'equazione canonica metrica.

Tabella 14. Lista completa, senza ripetizioni, delle quadriche dello spazio in forma canonica affine.

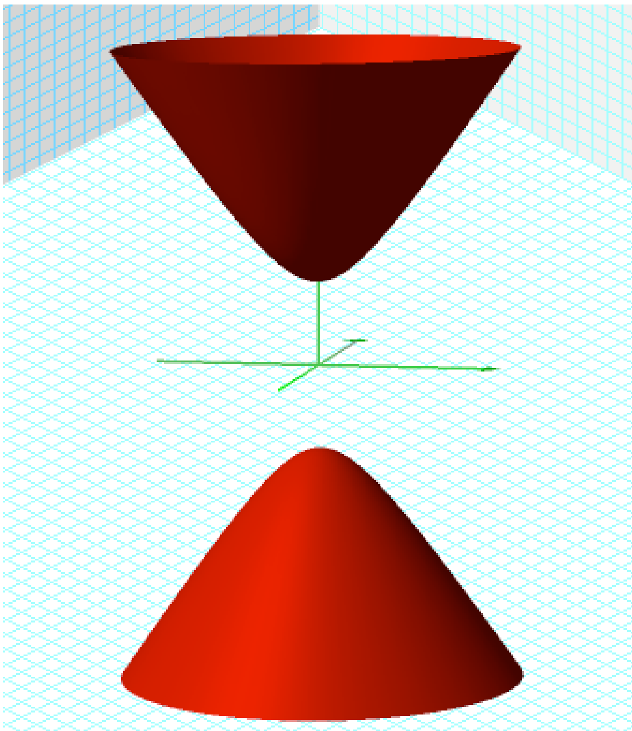
I.	1.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$	ellissoide
I.	2.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$	punto
I.	3.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -1$	$\emptyset$
II.	4.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1$	iperboloide ad una falda
II.	5.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$	cono
II.	6.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = -1$	iperboloide a due falde
III.	7.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3 = 0$	paraboloide ellittico
III.	8.	$X_1^2 + X_2^2 = 1$	cilindro ellittico
III.	9.	$X_1^2 + X_2^2 = 0$	una retta
III.	10.	$X_1^2 + X_2^2 = -1$	$\emptyset$
IV.	11.	$X_1^2 - X_2^2 + X_3 = 0$	sella
IV.	12.	$X_1^2 - X_2^2 = 1$	cilindro iperbolico
IV.	13.	$X_1^2 - X_2^2 = 0$	due piani incidenti
V.	14.	$X_1^2 + X_2 = 0$	cilindro parabolico
V.	15.	$X_1^2 = 1$	due piani paralleli
V.	16.	$X_1^2 = 0$	due piani coincidenti
V.	17.	$X_1^2 = -1$	$\emptyset$



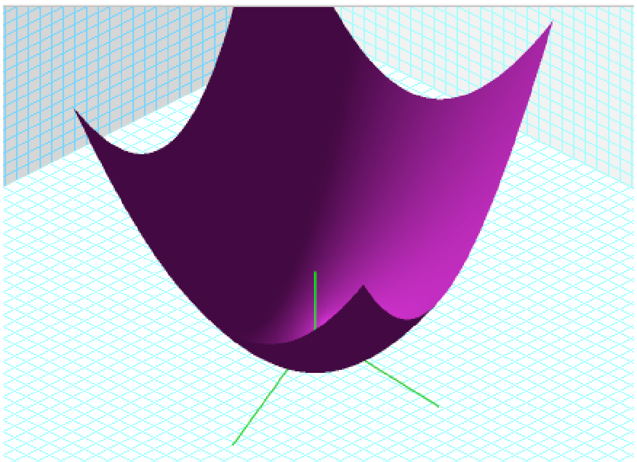
L'ellissoide.



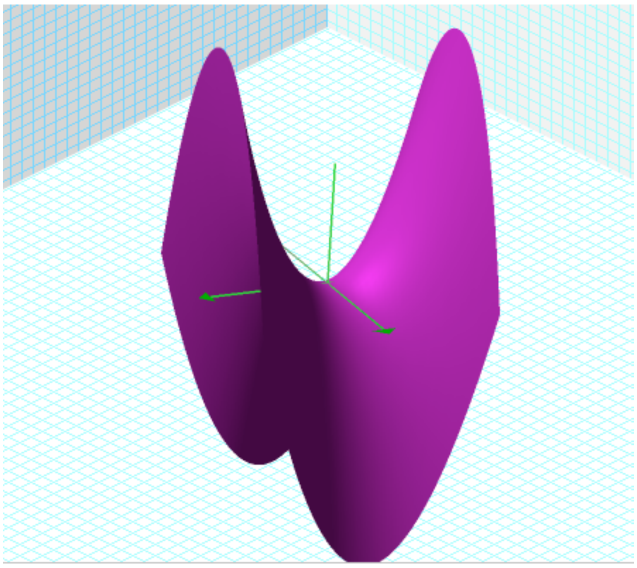
L'iperboloide ad una falda.



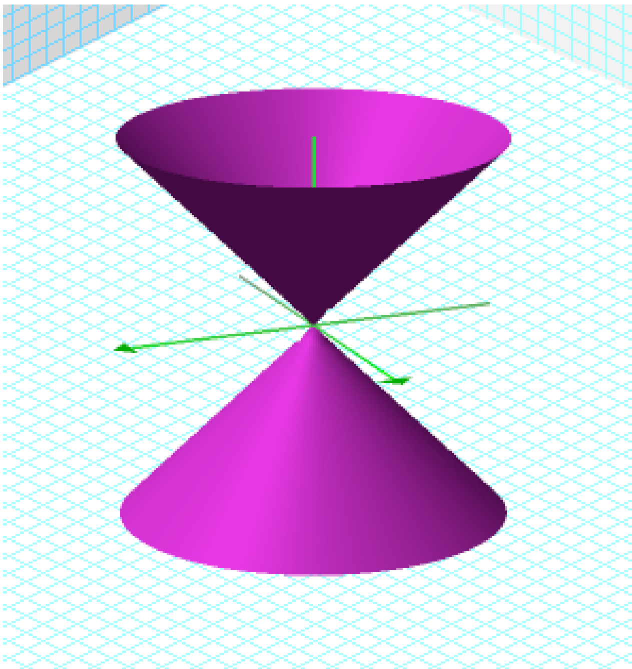
L'iperboloide a due falde.



Il paraboloide ellittico.



La sella.



Il cono.

Esempio 8.1. Consideriamo la seguente quadrica in $\mathbf{R}^3$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0.$$

La forma quadratica ad essa associata è

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono $\lambda = 2, -1, 0$ ed i rispettivi autospazi sono $V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. La matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rappresenta il cambiamento di coordinate da una base ortonormale di autovettori di A nella base canonica. Dunque, dalla sostituzione $\mathbf{x} = M\mathbf{x}'$ si ottiene l'equazione della quadrica nelle coordinate x_1', x_2', x_3'

$$2(x_1')^2 - (x_2')^2 - \frac{8}{\sqrt{6}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{3}}x_2' - \frac{4}{\sqrt{2}}x_3' + 4 = 0.$$

Mediante una traslazione, possiamo eliminare adesso i termini di primo grado in x_1' e x_2' ed il termine noto. La traslazione è precisamente

$$x_1' = x_1'' + \frac{2}{\sqrt{6}},$$
$$x_2' = x_2'' - \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$x_3' = x_3'' + \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

e l'equazione che si ottiene

$$2(x_1'')^2 - (x_2'')^2 - 2\sqrt{2}x_3'' = 0$$

rappresenta la forma canonica metrica della quadrica. La quadrica è una *sella*. Tramite il cambiamento di coordinate *affine*

$$x_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}X_1,$$
$$x_2'' = X_2,$$
$$x_3'' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}X_3,$$

troviamo infine la forma canonica affine della quadrica

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3 = 0.$$

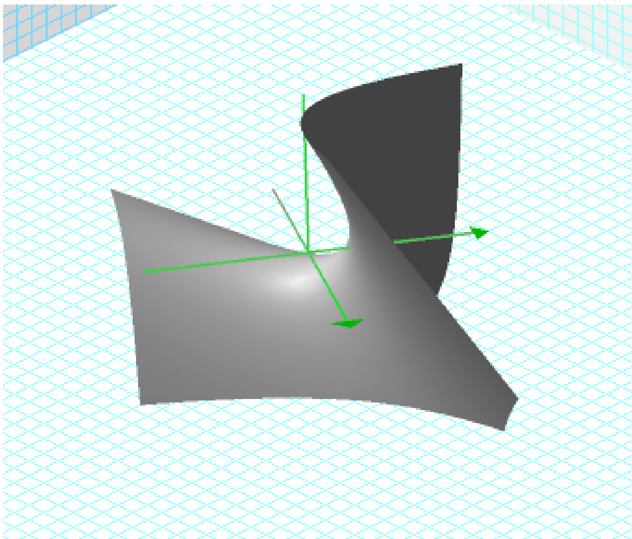


Fig.1. La quadrica $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0.$.

Esempio 8.2. Consideriamo la quadrica di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 10 = 0.$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice rappresentativa della corrispondente forma quadratica

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Gli autovalori e gli autospazi di A sono rispettivamente $\lambda = 2$ con $V_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\right\}$ e $\lambda = 0$ con $V_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Ne segue che il cambiamento di coordinate ortonormale $\mathbf{x} = M\mathbf{x}'$, ove la matrice M è data da $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, porta l'equazione nella forma

$$(x_1')^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2' - x_3' + 5 = 0.$$

Adesso, la traslazione

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1'' - \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ x_2' &= x_2'' - \frac{39\sqrt{2}}{8}, \\ x_3' &= x_3'', \end{aligned}$$

elimina il termine di primo grado in x_1' ed il termine noto, riducendo l'equazione nella forma

$$4(x_1'')^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2'' - x_3'' = 0.$$

L'equazione canonica metrica della quadrica

$$X_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{8}X_2 = 0$$

si ottiene con un ultimo cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} x_1'' &= X_1, \\ x_2'' &= \frac{\sqrt{3}}{3}X_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}X_3 \\ x_3'' &= -\frac{\sqrt{6}}{3}X_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}X_3. \end{aligned}$$

La quadrica è un cilindro parabolico.

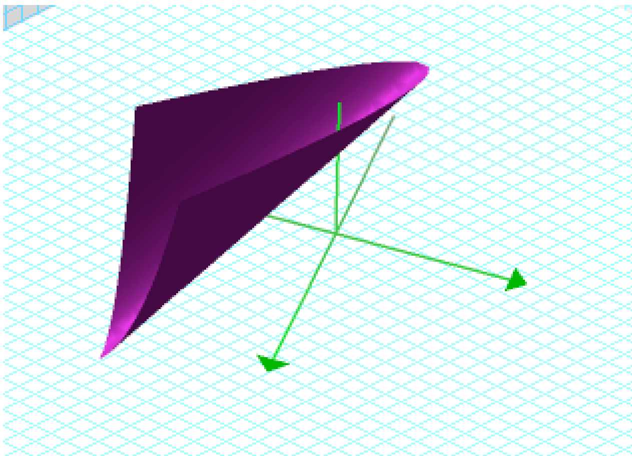


Fig.2. La quadrica $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 10 = 0.$.

Esercizi.

(8.A) Portare le seguenti quadriche in forma canonica metrica mediante una isometria.

(i) $4Z^2 + 2X + 3Y + 8Z = 0;$
(ii) $3X^2 + 6Y^2 + 2Z^2 + 12X + 12Y + 12Z + 42 = 0;$
(iii) $-3X^2 + 3Y^2 - 12XZ + 12YZ + 4X + 4Y - 2Z = 0;$

(8.B) Portare le seguenti quadriche in forma canonica metrica mediante una isometria.

(i) $7X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 20XY + 4XZ - 16YZ + 6X + 3Y - 6Z = 0;$
(ii) $40X^2 + 13Y^2 + 45Z^2 + 36XY - 12XZ + 24YZ + 15X - 30Y + 10Z + 7 = 0.$

(8.C) Determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $X^2 + 4XY + 4Y^2 + 2XZ + 4YZ + Z^2 + 8X + 4Z = 0;$
(ii) $X^2 + 6XY - 4XZ + YZ + 4Z^2 + 2X - 4Z + 5 = 0;$
(iii) $3X^2 + 2XY + 2Y^2 + 6YZ + 7Z^2 + 2X + 2Y + 4Z + 1 = 0;$

(8.D) Determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $2X^2 + 8XY - 2Y^2 + 12XZ + 4YZ + 8Z^2 + 4X + 8Y + 12Z + 2 = 0$;

(ii) $2X^2 + 2XY + 3Y^2 - 4XZ + 2YZ + 2X - 2Y + 4Z = 0$.

(8.E) Per ogni $t \in \mathbf{R}$ determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $X^2 + tXY + Y^2 + Z^2 + 2X - 2Y = 0$;

(ii) $X^2 + tXY + Y^2 - 4YZ + Z^2 + 2X - 4Z = 0$;

(iii) $X^2 + Y^2 - Z^2 - 2X - 2Y - 2Z = tXY$.