Capitolo 12

Coni, Cilindri, Superfici di Rotazione e Quadriche

12.1 Esercizi

In questo capitolo sono inseriti gli esercizi di geometria analitica nello spazio che riguardano la rappresentazione di coni, cilindri, superfici di rotazione e quadriche.

Con V_3 si denota lo spazio vettoriale euclideo, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. In quest'ambito "$\cdot$" indica il prodotto scalare tra due vettori e "$\wedge$" il prodotto vettoriale o esterno tra due vettori.

Inoltre, tutti gli esercizi di questo capitolo sono assegnati nello spazio ordinario, rispetto ad un riferimento cartesiano (ortonormale, monometrico, positivo) $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ o, in modo equivalente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dove $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è una base ortonormale positiva dello spazio vettoriale V_3 su cui è definito lo spazio affine di punti che viene considerato.

Con:

$$\mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

si indica un'equazione di secondo grado nelle incognite x, y e z. Essa rappresenta il luogo dei punti di una quadrica $\mathcal{Q}$ nello spazio rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$. Si associano a $\mathcal{Q}$ le due matrici simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

L'equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

è l'equazione della rototraslazione di assi dal riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ al riferimento $\mathcal{R}' = (O', X, Y, Z)$, dove il punto O' ha coordinate (x_0, y_0, z_0), rispetto al riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ e P è una matrice ortogonale di ordine 3 con $\det(P) = 1$.

– Se $\operatorname{rank}(B) = 4$ si ottengono le equazioni delle quadriche in forma canonica secondo la seguente classificazione:

  - se $\operatorname{rank}(A) = 3$ si ha:

    $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: ellissoide;

    $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$: ellissoide immaginario;

    $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: iperboloide ad una falda (iperboloide iperbolico);

    $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: iperboloide a due falde.

  - Se $\operatorname{rank}(A) = 2$ si ha:

    $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - z = 0$: paraboloide ellittico.

    $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} - z = 0$: paraboloide iperbolico (paraboloide a sella).

– Se $\operatorname{rank}(B) = 3$ si hanno quadriche degeneri (del tipo cono e cilindro). In particolare:

  - se $\operatorname{rank}(A) = 3$ si ha:

    $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0$ con $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$: cono reale o immaginario.

  - Se $\operatorname{rank}(A) = 2$ si ha:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 : \text{cilindro immaginario;}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 : \text{cilindro ellittico;}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 : \text{cilindro iperbolico;}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - 2y = 0 : \text{cilindro parabolico.}$$

- Se $\operatorname{rank}(B) = 2$ le quadriche sono coppie di piani reali o immaginari. In particolare:

  - se $\operatorname{rank}(A) = 2$ si ha:

    $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 : \text{coppia di piani complessi coniugati, incidenti;}$$

    $$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 : \text{coppia di piani incidenti.}$$

  - Se $\operatorname{rank}(A) = 1$ si ha:

    $$\frac{X^2}{a^2} = -1 : \text{piani immaginari paralleli;}$$

    $$\frac{X^2}{a^2} = 1 : \text{piani paralleli.}$$

- Se $\operatorname{rank}(B) = 1$ si hanno due piani coincidenti di equazione $X^2 = 0$.

[1] 1. Determinare l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (0, 2, 1)$ le cui generatrici formano un angolo di $\pi/4$ con l'asse z.

2. Determinare le equazioni delle generatrici del cono $\mathcal{S}$ appartenenti al piano di equazione $x - y + 2 = 0$.

[2] Determinare l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 2)$ e di direttrice la circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$.

[3] Determinare l'equazione del cono di vertice l'origine $O = (0, 0, 0)$ e che contiene la circonferenza del piano $z = 4$, di centro $(2, 0, 4)$ e raggio 2.

[4] Data la circonferenza:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3 \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

1. determinare l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (0, 0, 1)$ che proietta $\mathcal{C}$.
2. Verificato che la conica $\mathcal{C}'$ intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano $z = 0$ ha equazione, in quel piano:
$$x^2 - 2xy - 2y^2 + 1 = 0,$$
classificare $\mathcal{C}'$.

[5] Determinare l'equazione del cono circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$$

con vertice $V = (0, 3, 0)$.

[6] Dati i punti $A = (1, 0, 0),\ B = (0, 1, 2),\ C = (-1, -2, 0),\ D = (3, 0, 2)$,

1. verificare che A, B, C, D non sono complanari.
2. Determinare il piano π contenente $A,\ B,\ C$.
3. Determinare l'equazione della sfera Σ di centro D e tangente a π.
4. Determinare l'equazione del cono di vertice A e circoscritto a Σ.

[7] Determinare l'equazione del cono di vertice l'origine $O = (0, 0, 0)$, circoscritto alla sfera di centro $C = (-4, -3, 2)$ e raggio 2.

[8] Data la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, scrivere l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (3, 0, -3)$ ad essa circoscritto.

[9] Data la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0,$$

determinare l'equazione del cono circoscritto a Σ con vertice nel punto $B = (0, 0, 1)$.

[10] Determinare l'equazione del cono avente vertice nell'origine e circoscritto alla sfera di centro $A = (1, 3, -1)$ e raggio 1.

[11] Dati i punti $A = (1, 1, 5),\ B = (2, 2, 1),\ C = (1, -2, 2),\ D = (-2, 1, 2)$,

1. determinare le equazioni della circonferenza $\mathcal{C}$ circoscritta al triangolo ABC.
2. Determinare l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice D e direttrice $\mathcal{C}$.

[12] Determinare l'equazione del cono che proietta la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z + 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

dal punto $V = (1, 0, -1)$.

[13] Determinare l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (2, 1, 1)$ circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

[14] Determinare l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 2)$ circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 4 = 0.$$

[15] Dati la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y + 6z + 2 = 0$$

e il piano $\pi : z - 1 = 0$,

1. verificare che la curva $\Sigma \cap \pi$ è una circonferenza $\mathcal{C}$ di cui si chiedono il centro e il raggio.
2. Determinare l'equazione del cono di vertice l'origine $O = (0, 0, 0)$ e direttrice la circonferenza $\mathcal{C}$.

[16] Scrivere l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (0, 1, 1)$ circoscritto alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) = 0$.

[17] Scrivere l'equazione del cono di vertice $V = (4, 0, 0)$ circoscritto alla sfera di centro $C = (1, 1, 1)$ e raggio 3.

[18] Descrivere le seguenti superfici di equazione:

1. $x^2 + (y - 1)^2 = z^2$;
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[19] Data la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0,$$

determinare l'equazione del cono di vertice $V = (1, 2, 1)$ circoscritto alla sfera Σ.

[20] Data la circonferenza:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 1)$ con direttrice $\mathcal{C}$.

[21] Data l'iperbole equilatera $\mathcal{I}$ di equazioni:

$$\mathcal{I} : \begin{cases} xy = 5 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione del cono $\mathcal{S}$ di vertice $V = (1, 1, 1)$ e direttrice $\mathcal{I}$.

[22] Determinare l'equazione del cilindro che contiene la parabola $\mathcal{P}\colon\ x = z - y^2 = 0$ e che ha le generatrici parallele alla retta $r\colon\ z = x - y = 0$.

[23] Determinare l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera di centro $C = (1, 1, 0)$ e raggio uguale a 2, avente le generatrici parallele alla retta:

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[24] Dati il piano $\pi : x - z = 0$ e il punto $P = (2, 0, 1)$,

1. determinare il luogo $\mathcal{C}$ dei punti di π aventi distanza pari a 3 da P;
2. determinare l'equazione del cilindro avente direttrice $\mathcal{C}$ e generatrici parallele all'asse z.

[25] Data la curva:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

determinare le equazioni della sua proiezione sul piano coordinato xy parallelamente alla direzione della retta s di equazioni:

$$s: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

[26] Dati il piano $\pi : x - z - 2 = 0$ e la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, determinare l'equazione del cilindro avente per direttrice la circonferenza $\Sigma \cap \pi$ e le generatrici parallele alla retta $r : 2x = y = 2 - 2z$.

[27] Dati la retta:

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 1, \end{cases}$$

il vettore $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ e la superficie $\mathcal{S}$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2x + 2z = 0$,

1. determinare l'equazione del piano π parallelo ad r, al vettore $\mathbf{v}$ e passante per l'origine.
2. Verificare che $\mathcal{S}$ è un cilindro con generatrici perpendicolari al piano π.
3. Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta dall'intersezione di $\mathcal{S}$ con π, verificato che l'origine O appartiene a $\mathcal{C}$, scrivere l'equazione della retta r tangente a $\mathcal{C}$ in O.

[28] Data la circonferenza:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione del cilindro di direttrice $\mathcal{C}$ e generatrici ortogonali al piano che la contiene.

[29] Dati la sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$$

e il piano $\pi : x - 2y - 2z + 12 = 0$, determinare l'equazione del cilindro circoscritto a Σ ed avente le generatrici ortogonali ad π.

[30] Si considerino il vettore $\mathbf{v} = (\mathbf{k} + \mathbf{j}) \wedge \mathbf{i}$ e la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinare l'equazione del cilindro $\mathcal{S}$ con direttrice $\mathcal{C}$ e generatrici parallele a $\mathbf{v}$.

[31] Dati la sfera $\Sigma : x^2+y^2+z^2-4x+6y = 0$ ed il vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, determinare l'equazione del cilindro circoscritto a Σ ed avente le generatrici parallele a $\mathbf{v}$.

[32] Dati i punti $A = (1, 2, -1),\ B = (2, -1, 1)$, determinare l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera di centro il punto medio del segmento AB, passante per A ed avente le generatrici parallele all'asse x.

[33] Dati la retta:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

e la sfera Σ: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$, determinare l'equazione del cilindro circoscritto a Σ, con generatrici parallele a r.

[34] Determinare l'equazione del cilindro $\mathcal{S}$ che proietta la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

secondo la direzione della retta:

$$r : \begin{cases} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

[35] Determinare l'equazione del cilindro che proietta la circonferenza del piano $y = 0$ di centro $C = (2, 0, 1)$ e raggio 2, secondo la direzione della retta:

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 5x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

[36] Descrivere le seguenti superfici di equazione:

1. $z = \sin x$;
2. $x^2 + y^2 = 2y$.

[37] Data la curva $\mathcal{C}$ di equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 - y = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione del cilindro avente $\mathcal{C}$ come direttrice e con generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$. Determinare, inoltre, la curva che si ottiene intersecando tale cilindro con il piano $x = 0$.

[38] Determinare l'equazione del cilindro circolare retto di asse la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

e raggio uguale a 3.

[39] Determinare l'equazione del cilindro circolare retto di asse la retta:

$$r : \begin{cases} x = t - 4 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e raggio uguale a 3.

[40] Determinare le equazioni della curva $\mathcal{C}'$ proiezione della curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

sul piano $y = 2$ secondo la direzione della retta:

$$s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

e classificare $\mathcal{C}'$.

[41] Determinare l'equazione del cilindro avente le generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e tangente all'ellissoide di equazione $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$.

[42] Determinare l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione completa intorno alla retta $x = y = z - 1$ della curva $\mathcal{C} : z = xy - x - y = 0$.

[43] Date le rette:

$$r : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = u + 1 \\ y = -2u \\ z = u + 1, \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa della retta s intorno a r.

[44] Determinare la superficie generata dalla rotazione completa dell'asse z intorno alla retta $x = y = z$ e verificare che si tratta di un cono con vertice nell'origine.

[45] Determinare la superficie di rotazione $\mathcal{S}$ che ha come asse la retta r: $x = y + z = 0$ e che contiene la retta:

$$s : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 5. \end{cases}$$

[46] Data la circonferenza:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 + z^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione completa di $\mathcal{C}$ intorno all'asse z.

[47] Data la retta:

$$r : \begin{cases} x = t + 4 \\ y = t \\ z = -3, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa della retta r intorno alla retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = -3. \end{cases}$$

[48] Data la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{-t}{1+t} \\ z = t, \qquad t \in \mathbb{R},\ t > -1, \end{cases}$$

1. verificare che l'equazione del cono $\mathcal{S}$ con vertice $V = (1, -1, -1)$ che proietta la curva $\mathcal{C}$ è $(y+1)(z+1) = (1-x)^2$.
2. Detta $\mathcal{C}'$ la curva intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano coordinato xy, determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa di $\mathcal{C}'$ intorno alla retta:

   $$r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

   Che tipo di superficie di rotazione si trova?

[49] Si considerino le rette:

$$r : \begin{cases} 3x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa della retta r intorno alla retta s.

[50] Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 0, \end{cases}$$

1. determinare l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione completa di r intorno ad s. Che tipo di superficie di rotazione si trova?

2. Verificare che il punto $P = (0, -\sqrt{5}, 3)$ appartiene alla superficie $\mathcal{S}$. Determinare centro e raggio del parallelo passante per P.

[51] Date le rette:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa di s intorno alla retta r e dire di quale superficie si tratta.

[52] Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = -12t - 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 1 \\ z = 2, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa di r intorno alla retta s. Calcolare la lunghezza del raggio del parallelo situato sul piano $x = -2$.

[53] Date le rette:

$$r : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + z = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ y + z - 4 = 0, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ generata dalla rotazione completa di r intorno alla retta s e precisare di quale superficie si tratta.

[54] Dati i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ e la retta $s : 3x - 1 = 2y + 1 = z$,

1. determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa della retta AB intorno alla retta s e precisare di quale superficie si tratta.
2. Trovare il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ tali che il triangolo ABP abbia area $\sqrt{3}$.

[55] Dati i punti $Q = (1, -1, 1)$, $R = (-1, 2, 1)$ scrivere l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla rotazione completa della retta, passante per Q e per R, intorno all'asse x e precisare di quale superficie si tratta.

[56] Descrivere le seguenti superfici di equazione:

1. $z = -1 + x^2 + y^2$;
2. $z^4 = x^2 + y^2$.

[57] Dati l'ellissoide $\mathcal{E} : x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ e la retta:

$$r : \begin{cases} 3x - 2z + 2 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

1. determinare l'equazione del cilindro avente le generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e tangente all'ellissoide $\mathcal{E}$.
2. Determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa della retta r attorno all'asse z.

[58] Date le rette:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 1, \end{cases}$$

determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa della retta r intorno alla retta s e precisare di quale superficie si tratta.

[59] Dati l'ellissoide $\mathcal{E} : 2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 0, \end{cases}$$

1. determinare l'equazione del cono avente vertice nel punto $V = (0, -1, 1)$ e tangente all'ellissoide $\mathcal{E}$.
2. Determinare l'equazione della superficie ottenuta dalla rotazione completa della retta r intorno all'asse z.

[60] 1. Descrivere la quadrica:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z.$$

2. Verificare che la retta:

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y + 12z = 0 \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{Q}$.

[61] Data la superficie:

$$\mathcal{S}: x^2 - 2xy + 4yz + 2xz + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

1. stabilire se $\mathcal{S}$ è simmetrica rispetto all'origine.
2. Indicata con $\mathcal{C}$ la curva intersezione di $\mathcal{S}$ con il piano $z = 1$, riconoscere che $\mathcal{C}$ è una conica e ridurla a forma canonica, determinando esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento necessarie per tale riduzione.

[62] Data la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

1. determinare una matrice ortogonale Q tale che ${}^tQAQ = D$, con D matrice diagonale.
2. Classificare la quadrica di equazione:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

[63] Determinare l'equazione dell'ellissoide avente centro nel punto $C = (1, 2, 3)$, assi paralleli agli assi coordinati x, y, z e semiassi di lunghezza, rispettivamente, uguale a $2, 3, 7$.

[64] Descrivere la quadrica di equazione:

$$x^2 + y^2 + kz^2 - 2x = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[65] Descrivere la superficie di equazione:

$$xy = 2z,$$

precisando l'eventuale cambiamento di riferimento usato.

[66] Descrivere le seguenti superfici di equazione:

1. $x^2 + z^2 = y$;
2. $z = 4 - x^2 - y^2$;
3. $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$;
4. $z = x^2 - y^2 + 2$.

[67] 1. Dimostrare che la superficie:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = u^3 + uv + v \\ y = \cos u + u + vu^2 \\ z = u(v+1), \qquad\qquad u, v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è una superficie rigata.

2. Determinare i parametri direttori della generica retta di $\mathcal{S}$.

[68] Descrivere la quadrica rigata di equazione:

$$x^2 + 4y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

determinare le equazioni delle due schiere di rette ad essa appartenenti e calcolarne i parametri direttori.

[69] Determinare il luogo dei punti P dello spazio per i quali è costante il rapporto k delle distanze di P:

1. dall'origine e dal punto $(0, 0, 1)$;
2. dall'origine e dal piano $z = 0$;
3. dal punto $(0, 0, 1)$ e dal piano $z = 0$;
4. dall'origine e dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0; \end{cases}$
5. dall'origine e dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1; \end{cases}$

6. dalla retta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ e dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0; \end{cases}$

7. dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e dalla retta $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0; \end{cases}$

8. dalla retta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0; \end{cases}$

9. dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ e dal piano $z = 0$;

10. dalla retta $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e dal piano $z = 0$;

11. dalla retta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e dal piano $z = 0$;

12. dal piano $x = 0$ e dal piano $x - 1 = 0$;

13. dal piano $x = 0$ e dal piano $z = 0$;

14. dal piano $z = 0$ e dal piano $z = 0$.

[70] Sono dati l'iperboloide ad una falda $\mathcal{H} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e il paraboloide ellittico $\mathcal{K} : 2x^2 + y^2 - 4z = 0$.

1. Determinare le equazioni delle rette appartenenti ad $\mathcal{H}$ e passanti per il punto $P = (1, 1, 1)$ appartenente a $\mathcal{H}$.

2. Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{H}$ in P.

3. Determinare l'equazione del cono avente vertice nel punto $(0, 0, -1)$ e circoscritto al paraboloide $\mathcal{K}$.

12.2 Soluzioni

[1] 1. $\mathcal{S} : x^2 + (y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 0$ è il cono richiesto.

2. Le generatrici richieste sono le due rette di equazioni:

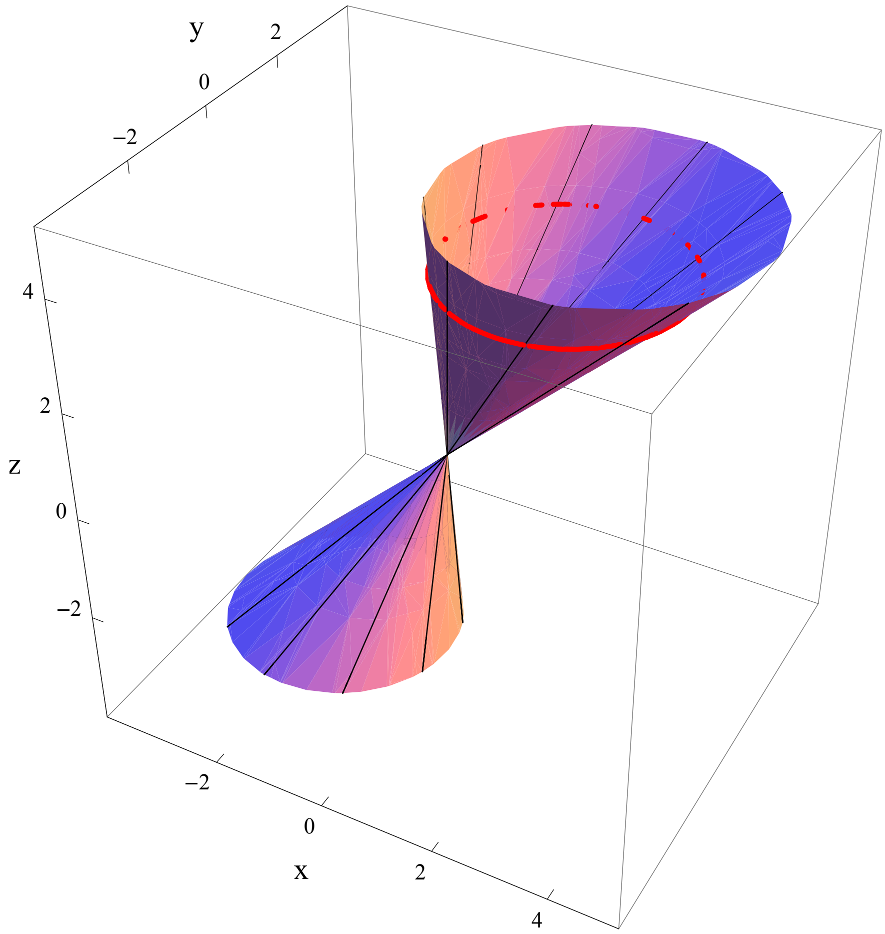

Figura 12.1: Esercizio n. 3

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \pm \sqrt{2}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[2] Il cono richiesto ha equazione $y^2 - xy + 2x(z-2) + y(z-2) = 0$.

[3] Il cono richiesto ha equazione $4x^2 - 4xz + yz = 0$, è rappresentato nella Figura 12.1.

[4] 1. $\mathcal{S} : x^2 - 2xy - 2y^2 + (z-1)^2 = 0$ è il cono richiesto, rappresentato nella Figura 12.2.

2. $\mathcal{C}' : x^2 - 2xy - 2y^2 + 1 = 0$ si tratta dell'iperbole di equazione, in forma canonica:

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}X^2 - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}Y^2 = 1, \text{ con:}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{13-3\sqrt{13}}}{\sqrt{52}} & -\dfrac{\sqrt{13+3\sqrt{13}}}{\sqrt{52}} \\ \\ \dfrac{(3+\sqrt{13})\sqrt{13-3\sqrt{13}}}{\sqrt{52}} & \dfrac{(3-\sqrt{13})\sqrt{13+3\sqrt{13}}}{\sqrt{52}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix}.$$

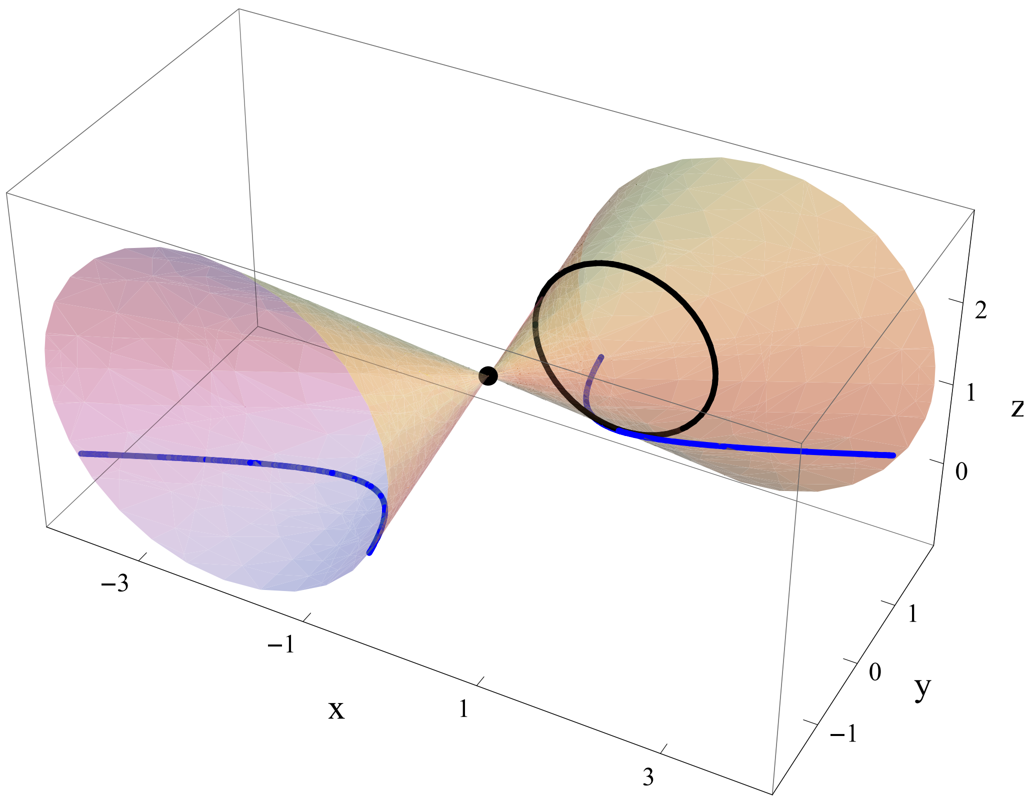

Figura 12.2: Esercizio n. 4, punto 1.

[5] Il cono richiesto ha equazione:

$$3x^2 + 3x(y-3) - xz - (y-3)^2 + 3(y-3)z + 3z^2 = 0.$$

[6] 1. I vettori $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ sono linearmente indipendenti.

2. $\pi : x - y + z = 1$ è il piano richiesto.

3. $\Sigma : 3(x-3)^2 + 3y^2 + 3(z-2)^2 = 16$ è la sfera richiesta.

4. Il cono richiesto ha equazione $(x-1)^2 + 6(x-1)z - 2y^2 + z^2 = 0.$

[7] Il cono richiesto ha equazione $9x^2 - 24xy + 16xz + 16y^2 + 12yz + 21z^2 = 0.$

[8] $\mathcal{S} : (x-3)^2 + 6(x-3)(z+3) + 4y^2 + (z+3)^2 = 0$ è il cono richiesto.

[9] Il cono richiesto ha equazione $2x^2 + 2xy + 2y^2 + (z-1)^2 = 0.$

[10] Il cono richiesto ha equazione $9x^2 + y^2 + 9z^2 - 6xy + 2xz + 6yz = 0.$

[11] 1. $\mathcal{C} : \begin{cases} (x+12)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 6 \\ 5x - y + z - 9 = 0 \end{cases}$

è la circonferenza richiesta.

2. $$\mathcal{S} : 779(x+2)^2 - 290(x+2)(y-1) + 83(y-1)^2 + 290(x+2)(z-2)$$
$$-58(y-1)(z-2) + 83(z-2)^2 = 0$$ è il cono richiesto.

[12] Il cono richiesto ha equazione:

$$2(x-1)^2 + 9y^2 - 6(x-1)y + (x-1)(z+1) - 2y(z+1) + (z+1)^2 = 0.$$

[13] $\mathcal{S} : 4(x-2)(y-1) - 3(y-1)^2 - 4(z-1)^2 = 0$ è il cono richiesto.

[14] Il cono richiesto ha equazione:

$$7x^2 + 2xy + 8x(z-2) + 7y^2 - 8y(z-2) - 8(z-2)^2 = 0.$$

[15] 1. $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ è una circonferenza in quanto la distanza di π dal centro di Σ (che è pari a 4) è minore del raggio di Σ (che è pari a $3\sqrt{3}$). La circonferenza $\mathcal{C}$ ha centro nel punto $C = (-2, -4, -3)$ e raggio 3.

2. Il cono richiesto ha equazione $x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xz + 8yz = 0$.

[16] Il cono richiesto è:

$$\mathcal{S} : 5x^2 + 2(y-1)^2 + 2(z-1)^2 - 4x(y-1) - 4x(z-1) - 8(y-1)(z-1) = 0.$$

[17] Il cono richiesto ha equazione:

$$7(x-4)^2 - y^2 - z^2 - 6(x-4)y - 6(x-4)z + 2yz = 0.$$

[18] 1. È un cono circolare retto di vertice $V = (0, 1, 0)$ e con asse l'asse z;

2. si tratta della metà (rivolta verso l'alto) di un cono circolare retto di vertice l'origine e asse l'asse z.

[19] Il cono richiesto ha equazione $(x-1)^2 - 2(y-2)(z-1) = 0$.

[20] Il cono richiesto ha equazione $13x^2 - y^2 - 2xy + (z-1)^2 + 6x(z-1) + 2y(z-1) = 0$.
Allo scopo di ottenere una migliore realizzazione grafica (cfr. Fig. 12.3), si sono utilizzate le equazioni parametriche del cono:

$$\begin{cases} x = t\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\right) \\ y = t\left(2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right) \\ z = 1 + t\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos\varphi - 1\right), \quad t \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

[21] $\mathcal{S} : (x-z)(y-z) - 5(1-z)^2 = 0$ è il cono richiesto.

[22] Il cilindro richiesto ha equazione $z = (y-x)^2$ ed è rappresentato nella Figura 12.4.

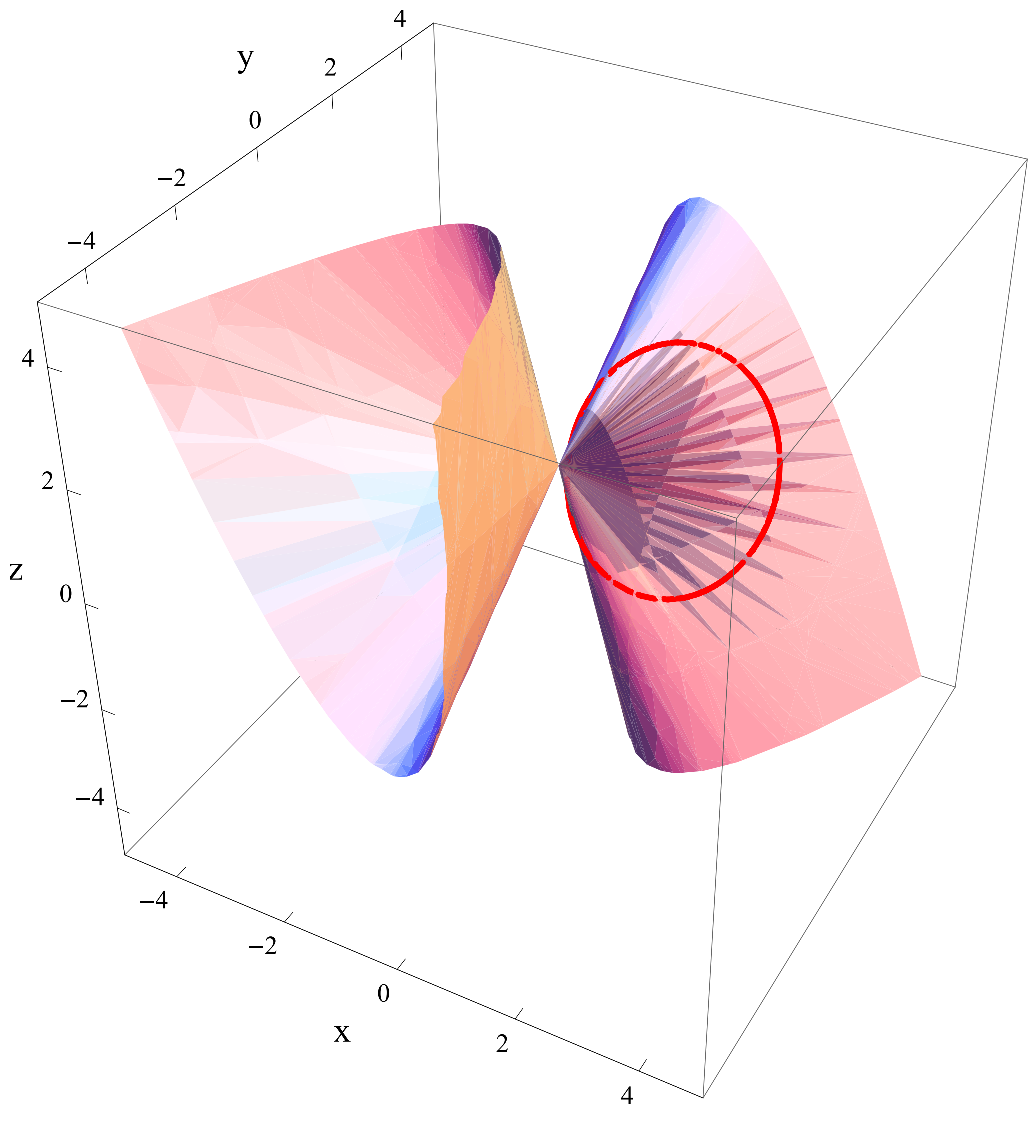

Figura 12.3: Esercizio n. 20

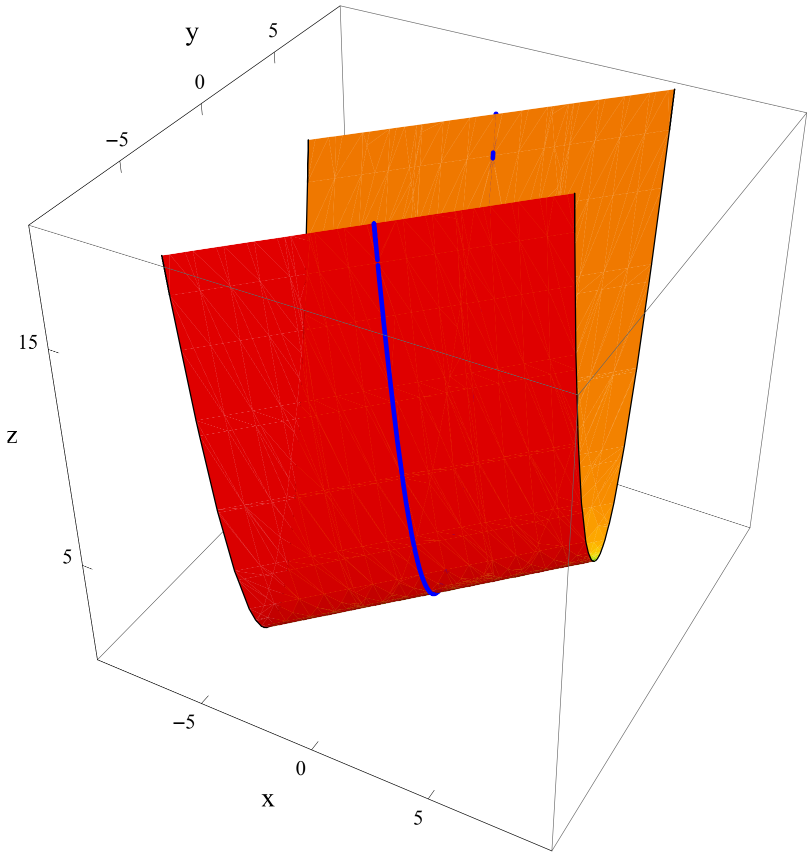

Figura 12.4: Esercizio n. 22

[23] Il cilindro richiesto ha equazione:

$(x - y + 2z)^2 - 6(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2) = 0.$

[24] 1. Il luogo richiesto è la circonferenza:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x - z = 0; \end{cases}$$

2. il cilindro richiesto ha equazione $(x-2)^2 + y^2 + (x-1)^2 = 9.$

[25] La curva richiesta ha equazioni:

$$\left(2y-2z+\frac{9}{2}\right)^2+\left(x-3y+2z-\frac{9}{2}\right)^2+\left(x-2y+z-\frac{9}{2}\right)^2-9=z=0.$$

[26] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$\frac{(x+z+2)^2}{4}+(-x+y+z+2)^2+\frac{(x+z-2)^2}{4}-(x+z+2)=0.$$

[27] 1. $\pi : x+z=0$ è il piano richiesto.

2. Si perviene alla tesi riducendo a forma canonica la quadrica assegnata. Si ottiene il cilindro di equazione $X^2+2Z^2=1$ rispetto al cambiamento di riferimento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. L'origine appartiene alla curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2xz-2x+2z=0 \\ x+z=0. \end{cases}$$

La retta r ha equazioni $x=z=0$.

[28] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz-2x-5y-7z+4=0.$$

[29] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$(x-2y-2z-4)^2-9(x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z-16)=0.$$

[30] $\mathcal{S} : 2x^2+x-y-z=0$ è il cilindro richiesto.

[31] L'equazione del cilindro circoscritto alla sfera Σ è:

$$(2x-y+3z-7)^2-14(x^2+y^2+z^2-4x+6y)=0.$$

[32] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 - \frac{7}{2} = 0.$$

[33] L'equazione del cilindro circoscritto alla sfera Σ è:

$$(y+z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z) = 0.$$

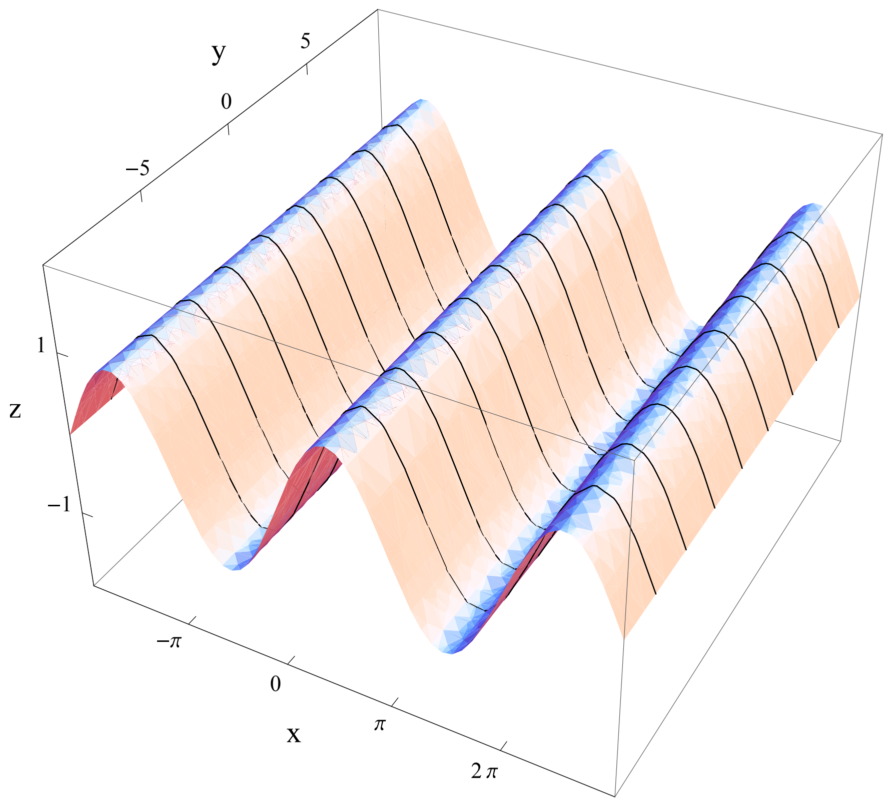

Figura 12.5: Esercizio n. 36, punto 1.

[34] Il cilindro richiesto è:

$$\mathcal{S} : \left[x + \frac{2}{3}(x - z - 1)\right]^2 + \left[y + \frac{1}{3}(x - z - 1)\right]^2 + \left[z + \frac{5}{3}(x - z - 1)\right]^2$$

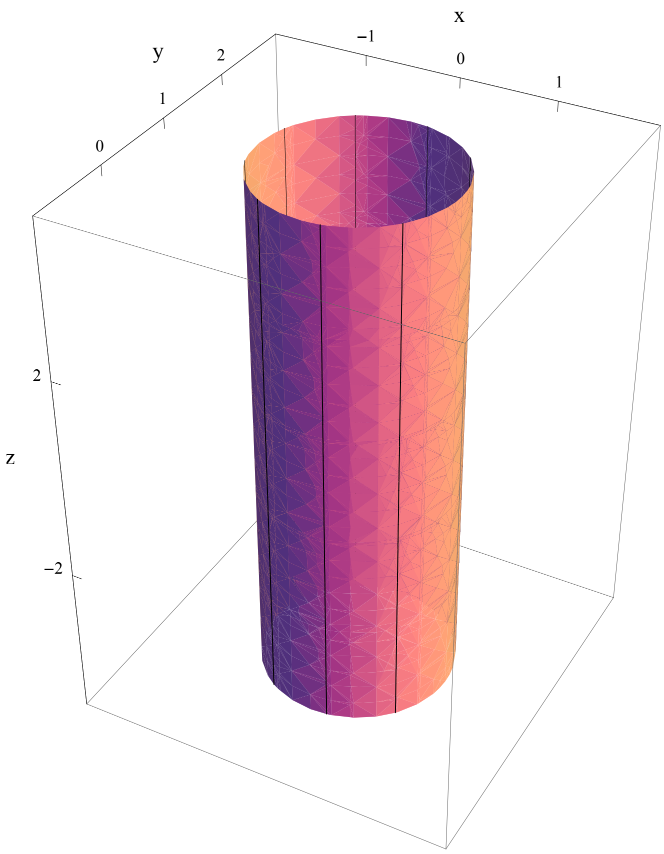

Figura 12.6: Esercizio n. 36, punto 2.

$$-2\left[x + \frac{2}{3}(x - z - 1)\right] - 3\left[y + \frac{1}{3}(x - z - 1)\right] + 1 = 0.$$

[35] Il cilindro richiesto ha equazione $(2x - y - 4)^2 + (2z - 3y - 2)^2 = 16.$

[36] 1. Cilindro di direttrice la curva $z = \sin x$ del piano coordinato xz e con generatrici parallele all'asse y, rappresentato nella Figura 12.5;

2. cilindro di direttrice la circonferenza del piano coordinato xy di equazione $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e generatrici parallele all'asse z.

[37] Il cilindro richiesto ha equazione $(1 - z + x)^2 - 4y = 0.$

La curva, invece, ha equazioni $(1-z+x)^2-4y=x=0$, si tratta di una parabola.

[38] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$(x+y-2)^2-2(x^2+y^2+z^2-4y+2z-4)=0.$$

[39] Il cilindro richiesto ha equazione:

$$13x^2+10y^2+5z^2-4xy-6xz-12yz+90x-72y+18z+117=0.$$

[40] $\mathcal{C}' : \begin{cases} 3\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2+z^2=1 \\ y-2=0, \end{cases}$

la curva $\mathcal{C}'$ è un'ellisse di centro $(2,2,0)$.

[41] Il cilindro richiesto ha equazione $x^2+6y^2+z^2-2xz-2=0$.

[42] $\mathcal{S} : xy+(x+y)(z-1)=0$ è la superficie di rotazione cercata.

[43] La superficie di rotazione richiesta ha equazione:

$$(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=6\left(\frac{x+y-z}{2}\right)^2+8.$$

[44] La superficie di rotazione richiesta ha equazione $xy+xz+yz=0$. Trattandosi di un'equazione di secondo grado omogenea in x,y,z, essa rappresenta un cono di vertice l'origine.

[45] La superficie di rotazione richiesta è:

$$\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}(y-z-5)^2-13(y-z-5)-26=0.$$

[46] La superficie di rotazione richiesta è $\mathcal{S} : (x^2+y^2+z^2+3)^2-16(x^2+y^2)=0$.

[47] La superficie di rotazione richiesta ha equazione $x^2 - (y+4)^2 + (z+3)^2 = 0$, si tratta di un cono di vertice il punto di coordinate $(0, -4, -3)$.

[48] 1. Si verifica che la superficie richiesta ha proprio equazione:
$(y+1)(z+1) = (1-x)^2$.

2. La superficie di rotazione richiesta ha equazione $(x-1)^2 + z^2 = 1 + y$, si tratta di un paraboloide di rotazione.

[49] La superficie richiesta ha equazione:

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{2x+2y-4z+7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1-x-y+2z}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x+4y-8z+9}{10}\right)^2,$$

si tratta di un iperboloide di rotazione ad una falda.

[50] 1. La superficie di rotazione richiesta è $\mathcal{S} : 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$, si tratta di un iperboloide di rotazione ad una falda.

2. Il punto P appartiene alla superficie $\mathcal{S}$ perché le sue coordinate ne verificano l'equazione. Il centro e il raggio del parallelo passante per P sono rispettivamente:
$C = (0, 0, 3)$ e 5.

[51] La superficie richiesta ha equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{27}(x + 2y + 3z + 3)^2 - \frac{4}{9}(x + 2y + 3z + 3) + 1,$$

si tratta di un iperboloide di rotazione ad una falda.

[52] La superficie richiesta ha equazione $(12x+3)^2 - (y-1)^2 - (z-2)^2 + 9 = 0$, il raggio del parallelo indicato vale $15\sqrt{2}$.

[53] La superficie di rotazione richiesta è:

$$\mathcal{S} : (x+5)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 65 + 4(3x + y - z - 6) + 2\left(\frac{3x + y - z - 6}{2}\right)^2,$$

si tratta di un iperboloide di rotazione ad una falda.

[54] 1. Si tratta dell'iperboloide di rotazione ad una falda di equazione:

$$x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3\left(\frac{2x + 3y + 6z + 4}{11}\right)^2 + 4\left(\frac{2x + 3y + 6z + 4}{11}\right) + 2.$$

2. Si tratta del cilindro circolare retto di asse AB e di equazione:

$$\|(P-A) \wedge (P-B)\| = 2\sqrt{3}, \text{ ossia } (y-z-1)^2 + (x-z-2)^2 + (x-y-1)^2 = 12.$$

[55] $\mathcal{S} : 4y^2 + 4z^2 - (3x-1)^2 - 4 = 0$, si tratta di un iperboloide di rotazione ad una falda rappresentato nella Figura 12.7.

[56] 1. Paraboloide di rotazione, rivolto verso l'alto, di vertice $V = (0, 0, -1)$ e rappresentato nella Figura 12.8;

2. superficie ottenuta dalla rotazione completa della parabola $z^2 = x$ del piano coordinato xz intorno all'asse z, rappresentata nella Figura 12.8.

[57] 1. Il cilindro richiesto ha equazione $x^2 + 6y^2 + z^2 - 2xz - 2 = 0$.

2. La superficie di rotazione richiesta ha equazione $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 8z - 4 = 0$.

[58] La superficie di rotazione richiesta ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + 3(z-1)^2 - 4(x-1)(y+1) = 0,$$

si tratta di un cono, essendo le rette r ed s incidenti nel punto di coordinate $(1, -1, 1)$.

[59] 1. Il cono richiesto ha equazione $x^2 + yz - y + z - 1 = 0$.

2. La superficie di rotazione richiesta ha equazione $x^2 + y^2 = 9$.

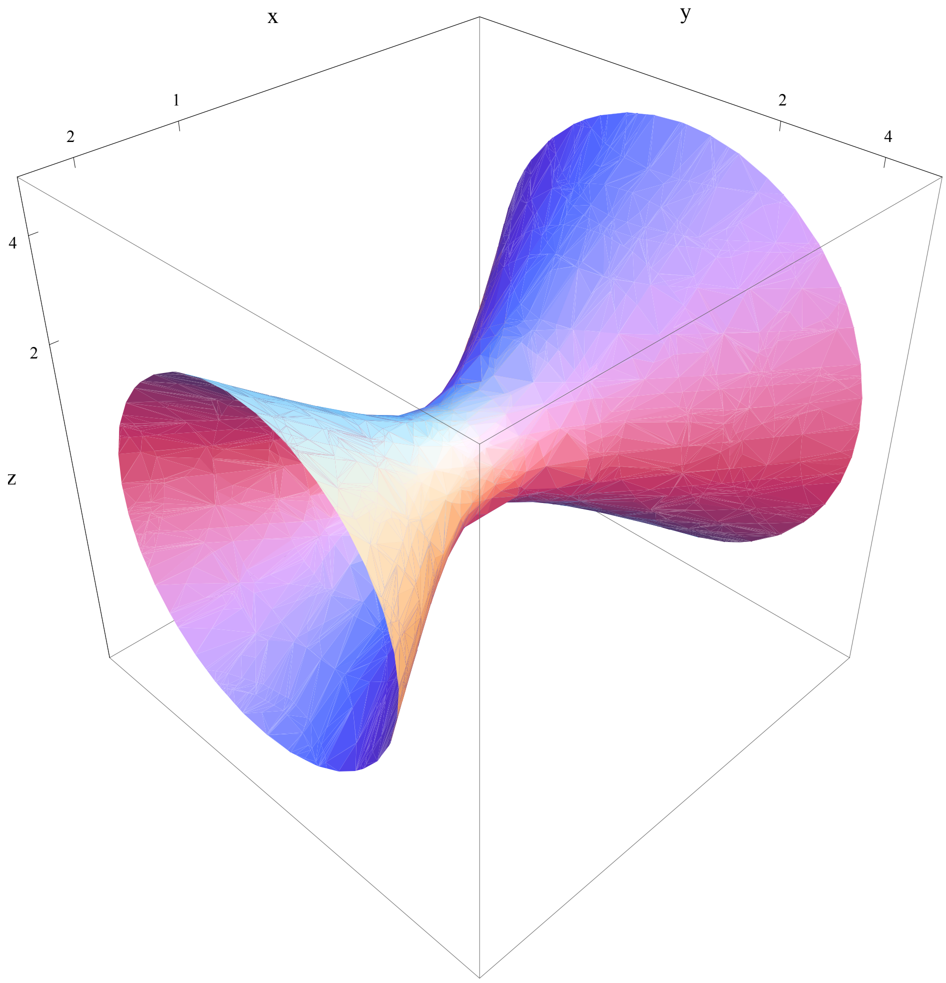

Figura 12.7: Esercizio n. 55

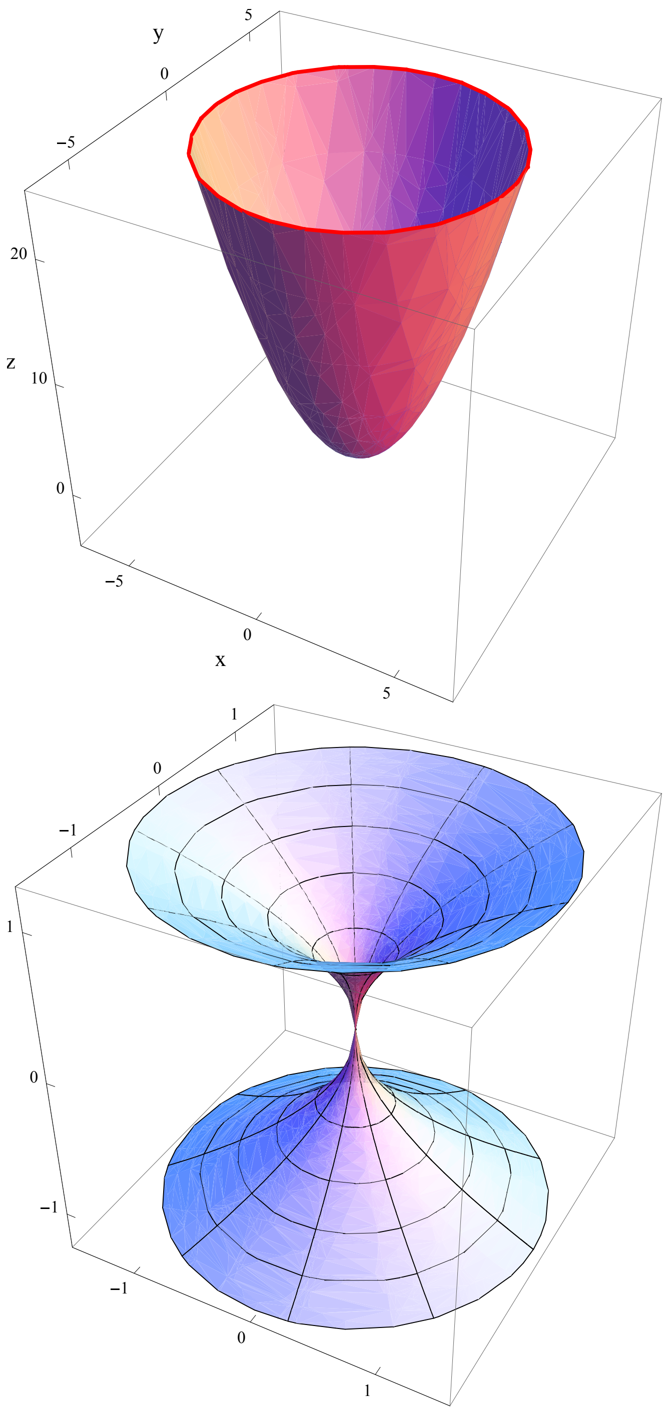

Figura 12.8: Esercizio n. 56, punti 1. e 2.

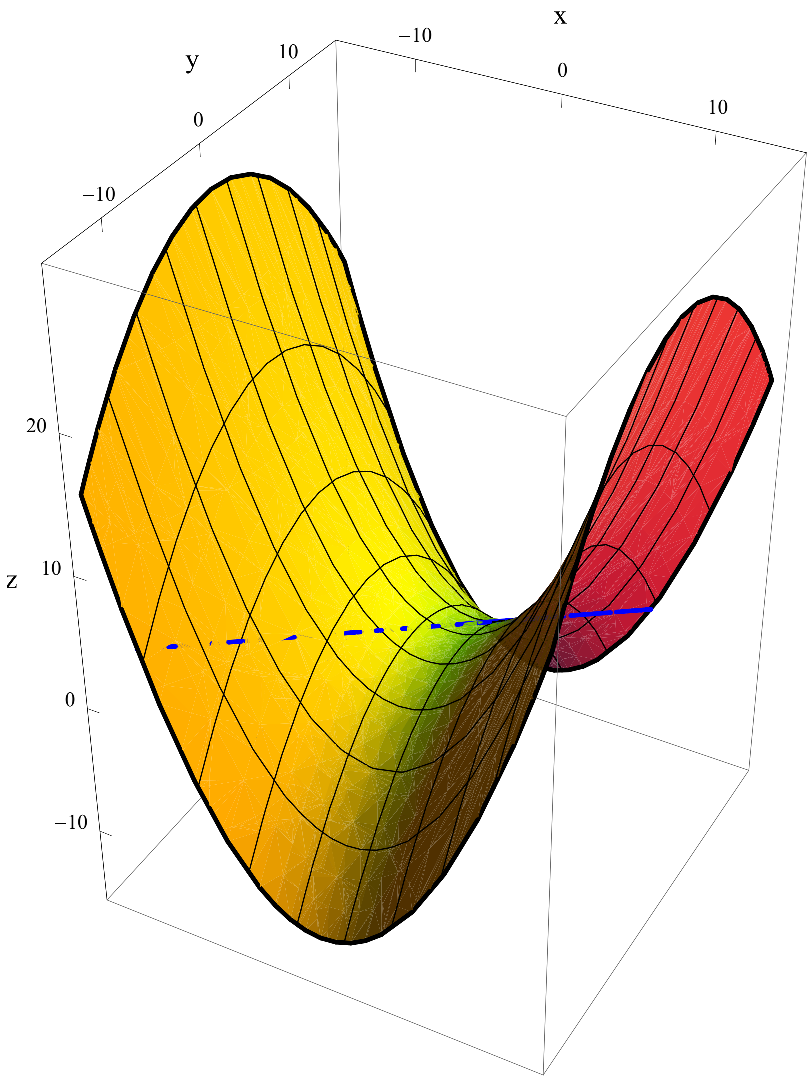

Figura 12.9: Esercizio n. 60, punto 1.

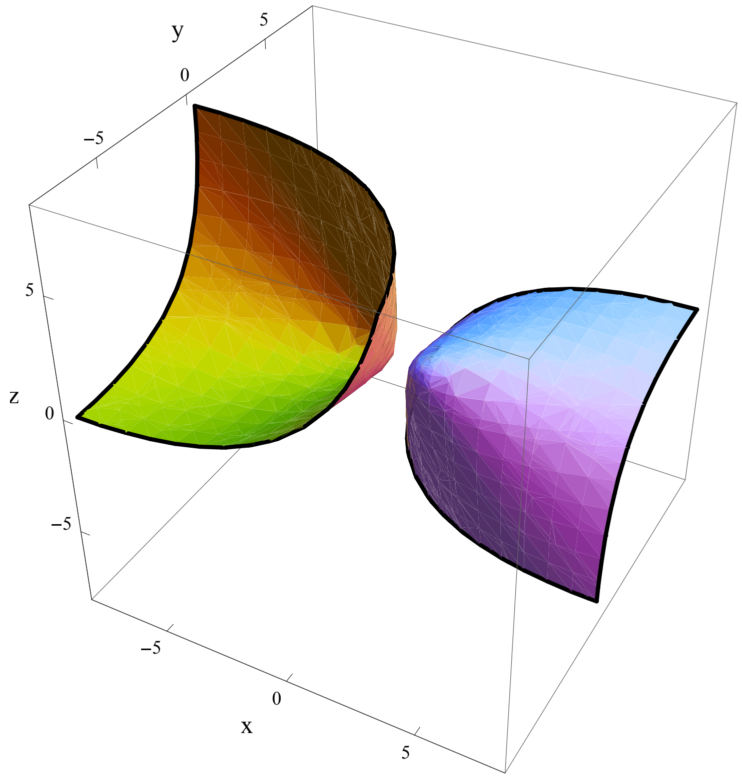

Figura 12.10: Esercizio n. 61, punto 1.

[60] 1. $\mathcal{Q}$ è il paraboloide iperbolico rappresentato nella Figura 12.9.

2. Le equazioni parametriche della retta r:

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

verificano l'equazione del paraboloide.

[61] 1. La superficie $\mathcal{S}$ è simmetrica rispetto all'origine: per ogni punto $P = (x, y, z)$ appartenente a $\mathcal{S}$ anche il punto $P' = (-x, -y, -z)$ appartiene a $\mathcal{S}$ ed è rappresentata nella Figura 12.10.

2. $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$, si tratta della parabola di equazione in forma canonica $2Y^2 + 3\sqrt{2}X = 0$, rispetto al cambiamento di riferimento dato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ \\ -\frac{13}{24} \end{pmatrix}.$$

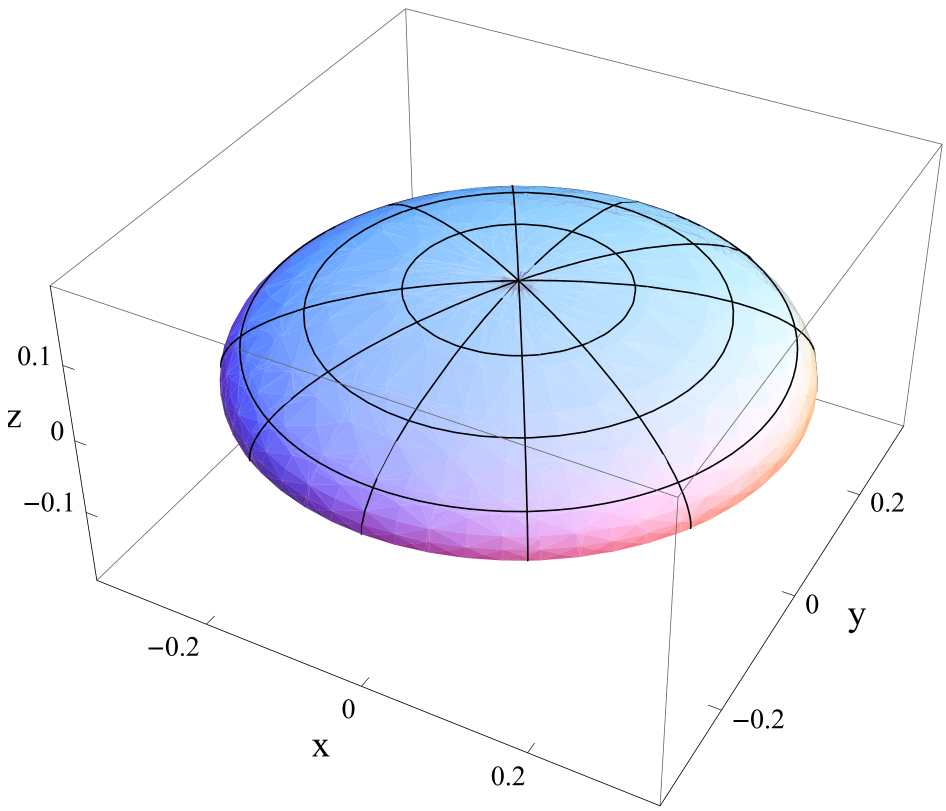

Figura 12.11: Esercizio n. 62

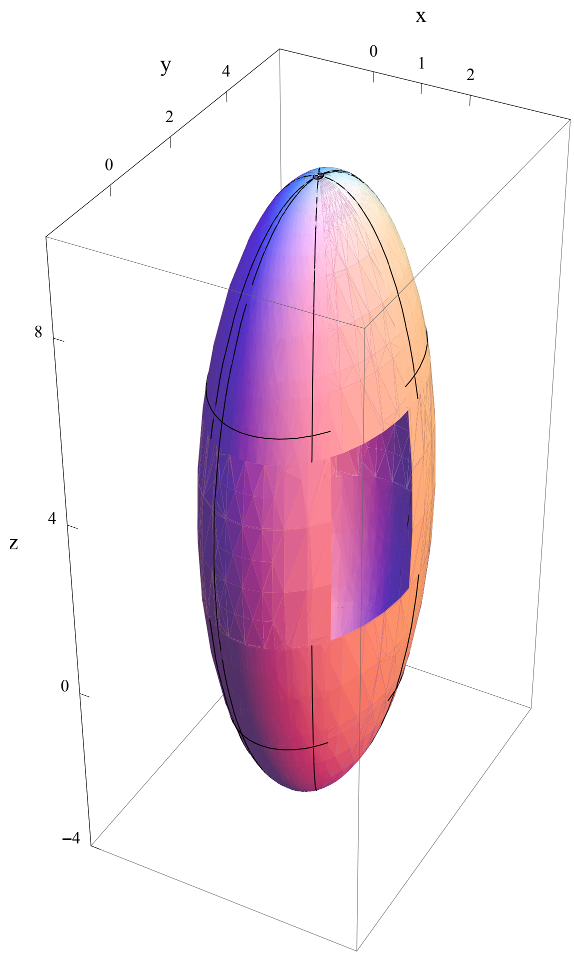

Figura 12.12: Esercizio n. 63

[62] 1. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix},$

sono le matrici richieste.

2. Dalla matrice D è chiaro che si tratta di un ellissoide di rotazione di equazione: $3X^2 + 3Y^2 + 9Z^2 = 1,$ nel riferimento $\mathcal{R}' = (O, X, Y, Z)$ tale che:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \\ \\ Z \end{pmatrix}.$$

L'ellissoide è rappresentato nella Figura 12.11.

[63] L'ellissoide ha equazione:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{49} = 1$$

ed è rappresentato nella Figura 12.12.

[64] Mediante la traslazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ottiene la quadrica ridotta a forma canonica di equazione $X^2 + Y^2 + kZ^2 = 1,\ k \in \mathbb{R}$. Pertanto:

per $k = 1$ si ha la sfera di raggio 1 e centro l'origine O' del sistema di riferimento traslato $\mathcal{R}' = (O', X, Y, Z)$;

per $k = 0$ si ha un cilindro circolare retto con asse parallelo all'asse Z;

per $k > 0,\ k \neq 1$ si ha un ellissoide di rotazione;

per $k < 0$ si ha un iperboloide (ad una falda) di rotazione intorno all'asse Z.

[65] Si tratta del paraboloide iperbolico di equazione, in forma canonica:

$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 2Z,$$

rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{R}' = (O, X, Y, Z)$ ottenuto da:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \\ Y \\ \\ Z \end{pmatrix}.$$

[66] 1. Paraboloide di rotazione di asse l'asse y, rappresentato nella Figura 12.13;

2. paraboloide di rotazione, con concavità verso il basso, di vertice $V = (0, 0, 4)$ e asse l'asse z, rappresentato nella Figura 12.13;
3. paraboloide ellittico, con vertice nell'origine, rappresentato nella Figura 12.14;
4. paraboloide iperbolico, rappresentato nella Figura 12.14.

[67] 1. La superficie $\mathcal{S}$ è una rigata in quanto il parametro v compare solo a primo grado ed è rappresentata nella Figura 12.15.

2. I parametri direttori della generica retta appartenente ad $\mathcal{S}$ sono:
   $(u + 1, u^2, u), \ u \in \mathbb{R}$.

[68] Si tratta dell'iperboloide ad una falda la cui forma canonica è $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$,

le due schiere di rette hanno equazioni:

$$\begin{cases} x + 2\lambda_1 \, y + z = \lambda_1 \\ \\ \lambda_1 \, x - 2y - \lambda_1 \, z = 1, \ \lambda_1 \in \mathbb{R}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2\lambda_2 \, y - z = \lambda_2 \\ \\ \lambda_2 \, x - 2y + \lambda_2 \, z = 1, \ \lambda_2 \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

hanno parametri direttori $(1 - \lambda_1^2, \ \lambda_1, \ -1 - \lambda_1^2)$ e $(1 - \lambda_2^2, \ \lambda_2, \ 1 + \lambda_2^2)$ rispettivamente.

[69] I luoghi richiesti sono:

1. se $k = 1$ si ottiene il piano di equazione $2z - 1 = 0$,

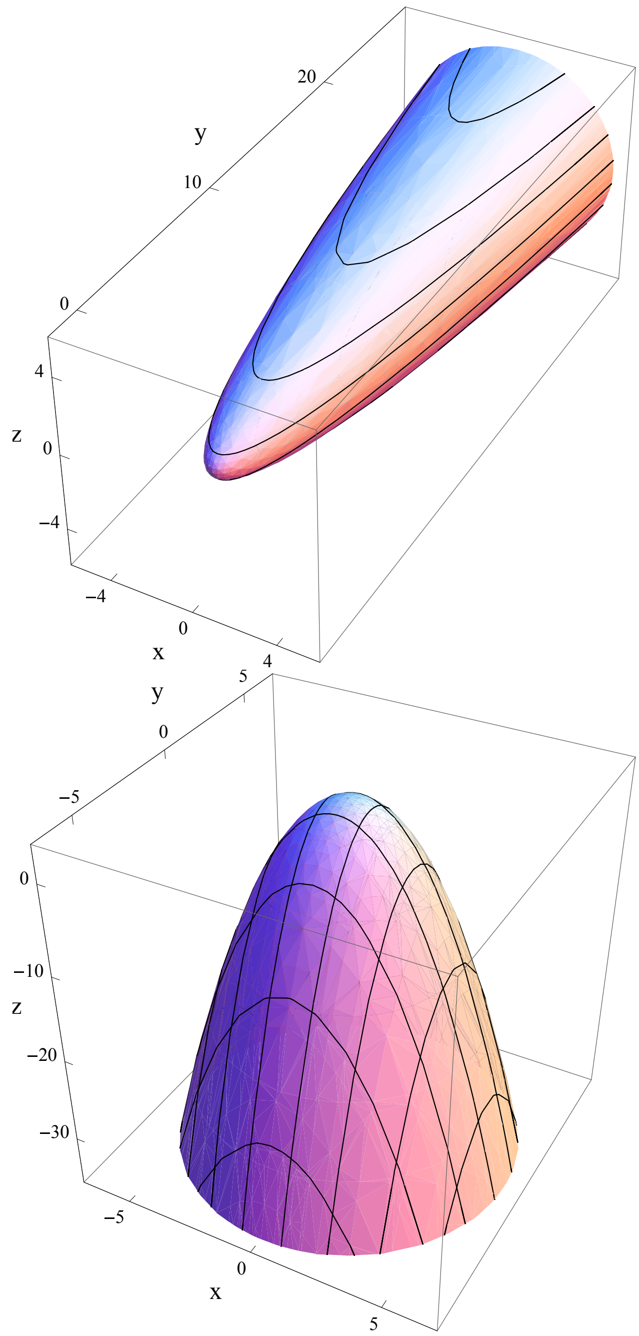

Figura 12.13: Esercizio n. 66, punti 1. e 2.

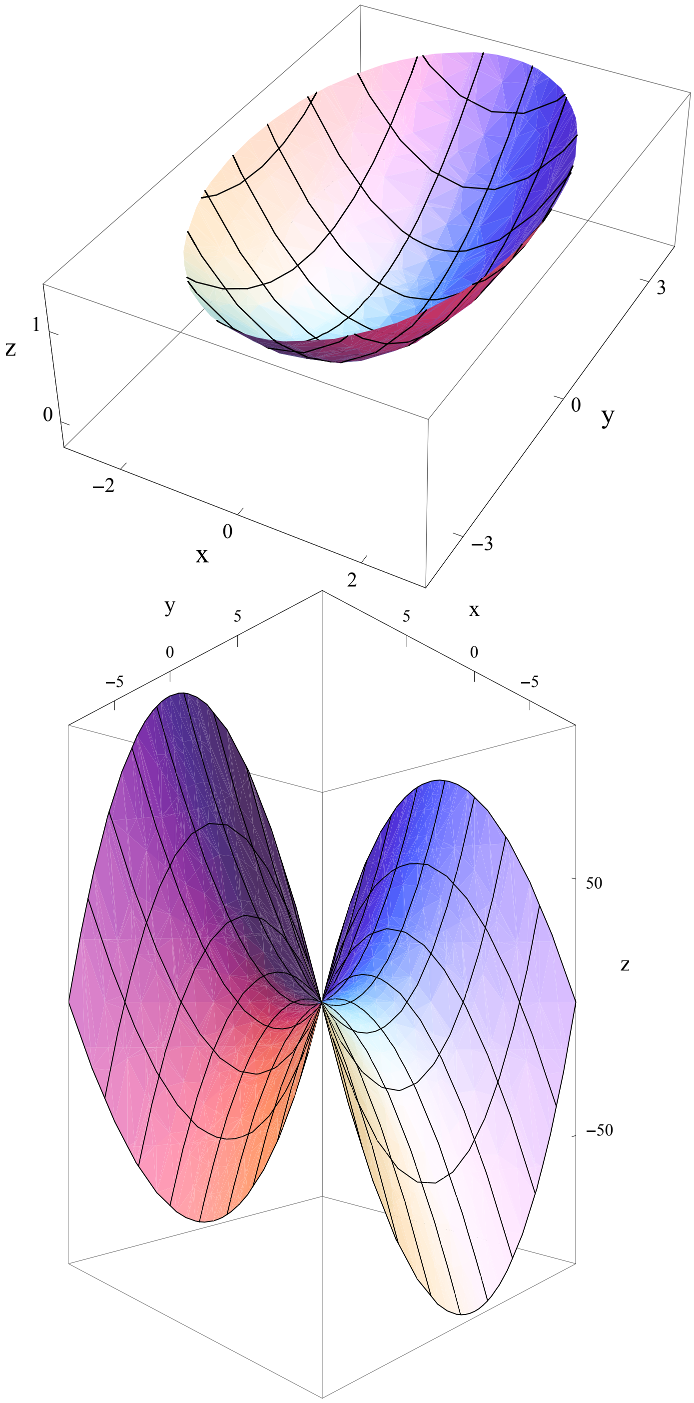

Figura 12.14: Esercizio n. 66, punti 3. e 4.

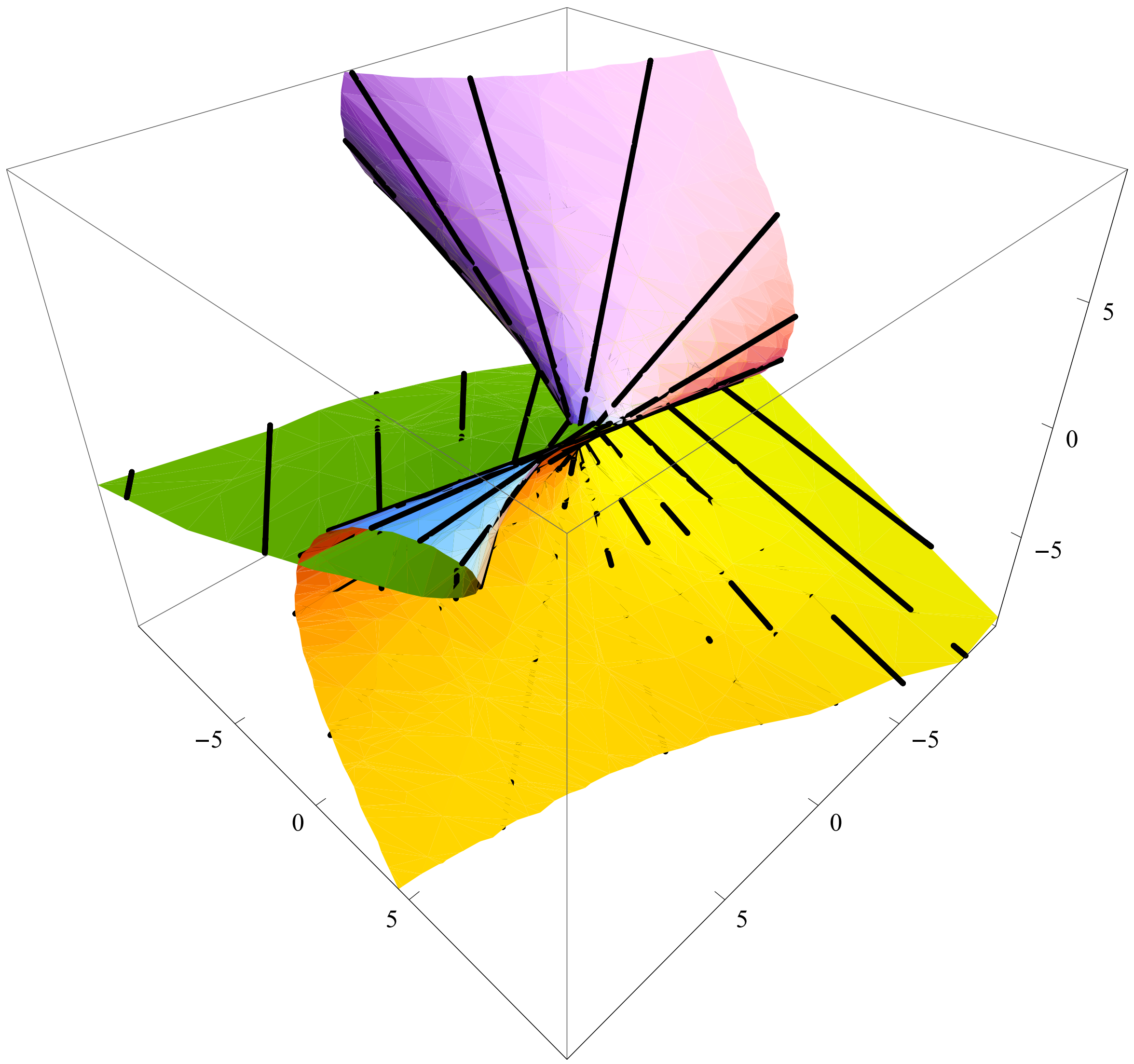

Figura 12.15: Esercizio n. 67, punto 1.

se $0 < k < 1$, oppure $k > 1$ si ottiene la famiglia di sfere:

$x^2(1-k^2) + y^2(1-k^2) + z^2(1-k^2) + 2k^2z - k^2 = 0$,

se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

2. se $0 \leq k \leq 1$ si ottengono i piani immaginari coniugati $x^2 + y^2 + z^2(1-k^2) = 0$,

   se $k < 1$ si ottengono i coni di rotazione $x^2 + y^2 + z^2(1-k^2) = 0$;

3. se $0 < k < 1$ si ottengono gli ellissoidi di rotazione:

   $$x^2 + y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

   se $k > 1$ si ottengono gli iperboloidi a due falde di rotazione:

   $$x^2 + y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

   se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati di equazione:

   $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottiene il paraboloide ellittico di rotazione di equazione:

   $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$;

4. se $0 < k < 1$ si ottengono i piani immaginari coniugati:

   $(1-k^2)x^2 + y^2 + (1-k^2)z^2 = 0$,

   se $k > 1$ si ottengono i coni di rotazione $(1-k^2)x^2 + y^2 + (1-k^2)z^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottengono due piani coincidenti $y^2 = 0$;

5. se $0 < k < 1$ si ottengono gli iperboloidi di rotazione ad una falda:

   $$(1-k^2)x^2 - k^2y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

   se $k > 1$ si ottengono gli ellissoidi di rotazione:

   $$(1-k^2)x^2 - k^2y^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $x^2 + (z-1)^2 = 0$,

se $k = 1$ si ottiene il cilindro $y^2 + 2z - 1 = 0$;

6. se $0 < k < 1$ oppure $k > 1$ si ottengono gli iperboloidi ad una falda:

   $$k^2x^2 - y^2 - (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{k^2-1} = 0,$$

   se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $y^2 + (z-1)^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottiene il paraboloide iperbolico $x^2 - y^2 + 2z - 1 = 0$;

7. se $0 < k < 1$ si ottengono i cilindri:

   $$(1-k^2)z^2 + (1-k^2)\left(x + \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{1+k^2-k^4}{1-k^2} = 0,$$

   se $k > 1$ si ottengono i cilindri immaginari:

   $$(1-k^2)z^2 + (1-k^2)\left(x + \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{1+k^2-k^4}{1-k^2} = 0,$$

   se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $x^2 + z^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottiene il piano di equazione $2x - 1 = 0$;

8. se $0 < k < 1$ oppure $k > 1$ si ottengono i coni $k^2x^2 - y^2 + (k^2-1)z^2 = 0$,

   se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $y^2 + z^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottengono i piani incidenti $(x+y)(x-y) = 0$;

9. se $0 < k < 1$ si ottengono i cilindri ellittici:

   $$x^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

   se $k > 1$ si ottengono i cilindri iperbolici:

   $$x^2 + (1-k^2)\left(z - \frac{1}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{1-k^2} = 0,$$

   se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $x^2 + (z-1)^2 = 0$,

   se $k = 1$ si ottiene il cilindro parabolico $x^2 - 2z + 1 = 0$;

10. se $0 \leq k < 1$ si ottengono i piani immaginari coniugati $(x-1)^2 + (1-k^2)z^2 = 0$,

    se $k > 1$ si ottengono i piani reali incidenti $(x-1)^2 + (1-k^2)z^2 = 0$,

    se $k = 1$ si ottengono i piani coincidenti $(x-1)^2 = 0$;

11. se $k \neq 0$ si ottengono i coni $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$,

    se $k = 0$ si ottengono i piani immaginari coniugati $x^2 + y^2 = 0$;

12. se $k \neq 0,\ k \neq 1$ si ottengono i piani paralleli $x^2 - k^2(x-1)^2 = 0$,

    se $k = 0$ si ottengono due piani coincidenti $x^2 = 0$,

    se $k = 1$ si ottiene il piano di equazione $2x - 1 = 0$;

13. se $k \neq 0$ si ottengono i piani incidenti $x^2 - k^2 z^2 = 0$,

    se $k = 0$ si ottengono due piani coincidenti $x^2 = 0$;

14. se $k \neq 1$ si ottengono due piani coincidenti $z^2(1-k^2) = 0$,

    se $k = 1$ si ottengono tutti i punti dello spazio.

[70] 1. Le rette richieste hanno equazioni:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Il piano richiesto ha equazione $x + y - z - 1 = 0$ e si è ottenuto applicando la *regola degli sdoppiamenti* che permette di determinare il piano tangente ad una quadrica in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

3. Il cono richiesto ha equazione $2x^2 + 2y^2 - (z+1)^2 = 0$.