

Capitolo 12

Coni, Cilindri, Superfici di Rotazione e Quadriche

Nel capitolo precedente si sono studiate le rappresentazioni in forma cartesiana e parametrica delle rette, dei piani, delle sfere e delle circonferenze nello spazio. Le rette e le circonferenze sono esempi di curve, i piani e le sfere sono esempi di superfici. In questo capitolo si affronteranno, in generale, alcuni aspetti elementari della rappresentazione delle curve e delle superfici nello spazio, esaminandone facili problemi di intersezione e di proiezione. In particolare, si studieranno le equazioni dei coni, dei cilindri e delle superfici di rotazione in due modi diversi a seconda della rappresentazione cartesiana o parametrica di una curva che concorre alla loro determinazione. Si accennerà, inoltre, allo studio delle superfici rigate. Invece si proporrà in modo completo la classificazione delle quadriche, che sono le superfici rappresentabili mediante equazioni di secondo grado, con una trattazione simile a quella già vista nel Capitolo 10 nel caso delle coniche per la loro riduzione in forma canonica. Questo capitolo vuole essere un primo approccio, a volte solo intuitivo, come per esempio nel caso della definizione proposta di piano tangente ad una superficie, allo studio delle curve e delle superfici nello spazio, argomento di estrema complessità ma di grande fascino, accresciuto ultimamente dalle sorprendenti applicazioni che sono derivate dalla rappresentazione grafica di curve e superfici mediante adeguati programmi di calcolo simbolico.

12.1 Cenni sulla rappresentazione di curve e superfici

In tutto questo capitolo, a meno di dichiarazione contraria, si considera un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ o, in modo equivalente, un riferimento $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, intendendosi con $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una base ortonormale positiva dello spazio vettoriale V_3 dei vettori ordinari su cui è costruito lo spazio affine di punti che si sta considerando.

Nel Capitolo 11 si è visto che un piano o una sfera, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$, si possono rappresentare nei due modi seguenti:

1. in forma parametrica mediante tre equazioni in x, y, z contenenti due parametri indipendenti,
2. in forma cartesiana, mediante un'unica equazione nelle tre coordinate x, y, z .

Infatti, in generale, tre equazioni con due parametri indipendenti u e v definiti su un sottoinsieme D di \mathbb{R}^2 del tipo:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

rappresentano una superficie \mathcal{S} dello spazio e si dicono *equazioni parametriche* di \mathcal{S} . Sono esempi di rappresentazione parametrica di una superficie le equazioni parametriche del piano (11.3) e le equazioni parametriche della sfera (11.30). Inoltre, una superficie si può anche rappresentare mediante un'equazione del tipo:

$$f(x, y, z) = 0,$$

con $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione qualsiasi, tale rappresentazione prende il nome di *equazione cartesiana* della superficie.

Come già visto per le rette e le circonferenze, una curva \mathcal{C} nello spazio può essere rappresentata, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$, in due modi diversi, o come *intersezione di due superfici*:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

dove sia f sia g sono funzioni qualsiasi di dominio \mathbb{R}^3 e codominio \mathbb{R} , o in forma parametrica, mediante le *equazioni parametriche* date al variare di un solo parametro t in un intervallo I di \mathbb{R} :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

In generale, non è semplice passare da una rappresentazione parametrica di una curva o di una superficie alla sua equazione cartesiana o viceversa, infatti potrebbero sorgere problemi. Per esempio, anche nel caso più semplice delle curve piane, la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t + t^5 \\ y = 1 + 2t + 3t^5 \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

non ha una ovvia rappresentazione come intersezione di superfici. Anche la circonferenza appartenente al piano xy , di centro l'origine e raggio r , che si può rappresentare in forma cartesiana come intersezione della sfera e del piano dati dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

può costituire un problema, infatti essa ammette infinite rappresentazioni parametriche, anche molto dissimili, per esempio:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

oppure:

$$\begin{cases} x = r \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \\ y = r \frac{2s}{1 + s^2} \\ z = 0, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

12.2 Il cono

In questo paragrafo si introducono i coni come luoghi geometrici dello spazio definiti da funzioni omogenee di grado k nelle variabili x, y, z . In particolare si studieranno i coni circoscritti ad una sfera e la proiezione di una curva da un punto su di un piano.

Definizione 12.1 *Sia C una curva nello spazio e V un punto non appartenente a C . Il cono di vertice V e direttrice C è il luogo delle rette che uniscono V ad ogni punto di C . Le rette sono dette generatrici del cono e ogni curva (non solo C) che incontra tutte le generatrici prende il nome di direttrice del cono.*

Si procede ora con la determinazione dell'equazione cartesiana e delle equazioni parametriche del cono, distinguendo i casi in cui la direttrice sia data come intersezione di due superfici o in forma parametrica.

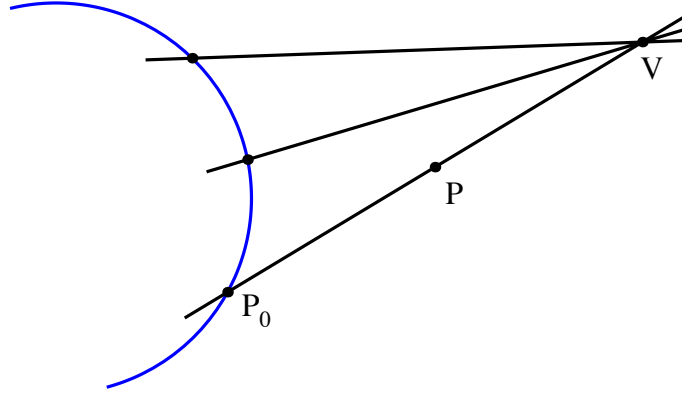


Figura 12.1: Generatrici del cono di vertice V e direttrice VP_0

Primo Caso Sia \mathcal{C} la direttrice di un cono data dall'intersezione di due superfici nella forma:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

con f e g funzioni da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} , sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di \mathcal{C} e $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ il vertice del cono, la retta P_0V è dunque una generatrice del cono. Se $P = (x, y, z)$ è il generico punto del cono, la condizione di allineamento dei punti P_0, P, V si ottiene dalle seguenti equazioni in forma parametrica:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + t(x - \alpha) \\ y_0 = \beta + t(y - \beta) \\ z_0 = \gamma + t(z - \gamma), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove le coordinate di P_0 variano su \mathcal{C} , perciò:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

La situazione geometrica è illustrata nella Figura 12.1. Eliminando i parametri x_0, y_0, z_0 e t dal sistema:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha + t(x - \alpha) \\ y_0 = \beta + t(y - \beta) \\ z_0 = \gamma + t(z - \gamma) \\ f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione cartesiana del cono. Si osservi che, anche se esistono infinite generatrici e infinite direttrici, l'equazione del cono così ottenuta non dipende dalla scelta della direttrice e della generatrice.

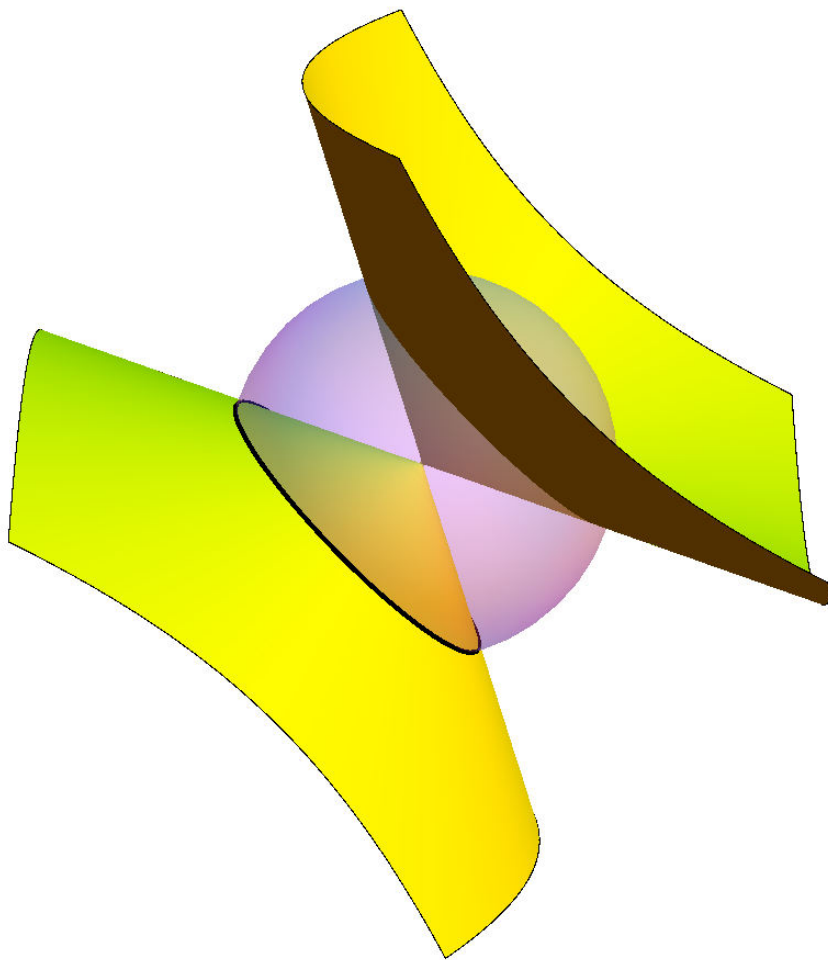


Figura 12.2: Esercizio 12.1

Esercizio 12.1 Scrivere l'equazione del cono avente come direttrice la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

e vertice $V = (0, 0, 0)$.

Soluzione Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto di \mathcal{C} , i punti P_0, P, V sono allineati se e solo se:

$$\begin{cases} x_0 = xt \\ y_0 = yt \\ z_0 = zt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

da cui si perviene al sistema:

$$\begin{cases} x_0 = xt \\ y_0 = yt \\ z_0 = zt \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 9 = 0 \\ x_0 + y_0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Eliminando i parametri x_0, y_0, z_0 , segue:

$$\begin{cases} t^2(x^2 + y^2 + z^2) - 9 = 0 \\ t(x + y) - 2 = 0, \end{cases}$$

ricavando t dalla seconda equazione e sostituendo tale valore nella prima si ottiene:

$$5x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 18xy = 0$$

che è l'equazione del cono, rappresentato nella Figura 12.2.

Si osservi che l'equazione del cono ottenuta nell'esercizio precedente è di secondo grado ed è omogenea in x, y, z nel senso che è somma di monomi dello stesso grado; la definizione che segue chiarisce questo concetto e subito dopo si dimostra che ogni equazione omogenea in x, y, z rappresenta un cono di vertice l'origine $O = (0, 0, 0)$ del riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ e viceversa.

Definizione 12.2 Una funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ nelle variabili x, y, z , si dice omogenea di grado k , ($k \in \mathbb{R}$), se:

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z),$$

per ogni valore reale di t, x, y, z .

Esempio 12.1 1. I polinomi che sono somma di monomi dello stesso grado k e con termine noto uguale a zero sono funzioni omogenee di grado k . Per esempio il polinomio $x^3 - 4y^3 - xyz$ è una funzione omogenea di grado 3.

2. Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione omogenea di grado 1.

3. Se $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione qualsiasi, allora la funzione:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto \psi \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$

è omogenea di grado zero, vale a dire $f(tx, ty, tz) = f(x, y, z)$ per ogni t reale.

Teorema 12.1 In un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$, tutti e soli i luoghi geometrici dei punti $P = (x, y, z)$ dello spazio tali che:

$$f(x, y, z) = 0,$$

dove $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione omogenea di grado k ($k \in \mathbb{R}$), rappresentano un cono di vertice l'origine O del riferimento.

Dimostrazione Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto della superficie \mathcal{S} di equazione:

$$\mathcal{S} : f(x, y, z) = 0,$$

con f funzione da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} omogenea di grado k . La retta r che unisce il punto P con l'origine O ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = tz_0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cioè le coordinate di ogni suo punto sono date da (tx_0, ty_0, tz_0) , al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. Per l'omogeneità di f il punto (tx_0, ty_0, tz_0) appartiene alla superficie \mathcal{S} in quanto $f(tx_0, ty_0, tz_0) = 0$. Ne segue che la retta r giace sulla superficie \mathcal{S} . Variando il punto P sulla superficie, tutte le rette che uniscono P all'origine del riferimento O giacciono sulla superficie stessa e ciò prova che \mathcal{S} è un cono con vertice in O .

Viceversa, si tratta di dimostrare che un cono di vertice l'origine O è rappresentato da un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$, con f funzione omogenea da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} . Infatti se $g(x, y, z) = 0$ è l'equazione cartesiana di un cono di vertice O , allora la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

è una direttrice del cono. Procedendo con il metodo descritto in precedenza per calcolare l'equazione cartesiana del cono di direttrice \mathcal{C} e vertice l'origine O , si consideri un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente a \mathcal{C} ossia:

$$\begin{cases} g(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

e si scrivano le equazioni parametriche della retta OP date da:

$$\begin{cases} x_0 = tx \\ y_0 = ty \\ z_0 = tz, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.1)$$

Dalle equazioni $z_0 = 1$ e da $z_0 = tz$ segue:

$$t = \frac{1}{z}. \quad (12.2)$$

Sostituendo in $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ le equazioni (12.1) e (12.2) si ha:

$$g(x_0, y_0, z_0) = g\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right).$$

Ponendo:

$$f(x, y, z) = g\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

si ottiene che la funzione f , che definisce il cono, è una funzione omogenea di grado zero (cfr. Es. 12.1). ■

Esempio 12.2 L'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ rappresenta il cono di vertice l'origine illustrato nella Figura 12.3 Le circonferenze di equazioni:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = k^2, \quad k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sono direttrici del cono. Si tratta di un cono circolare retto (cfr. Par. 10.3) e lo si può anche ottenere dalla rotazione completa della retta passante per l'origine del riferimento e per il punto di coordinate $(1, 0, 1)$ intorno all'asse z (cfr. Par. 12.4), per questo motivo l'asse z è l'asse del cono.

Esempio 12.3 Si osservi che l'equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta solo la metà superiore (verso il semiasse positivo delle quote) del cono descritto nell'esempio precedente.

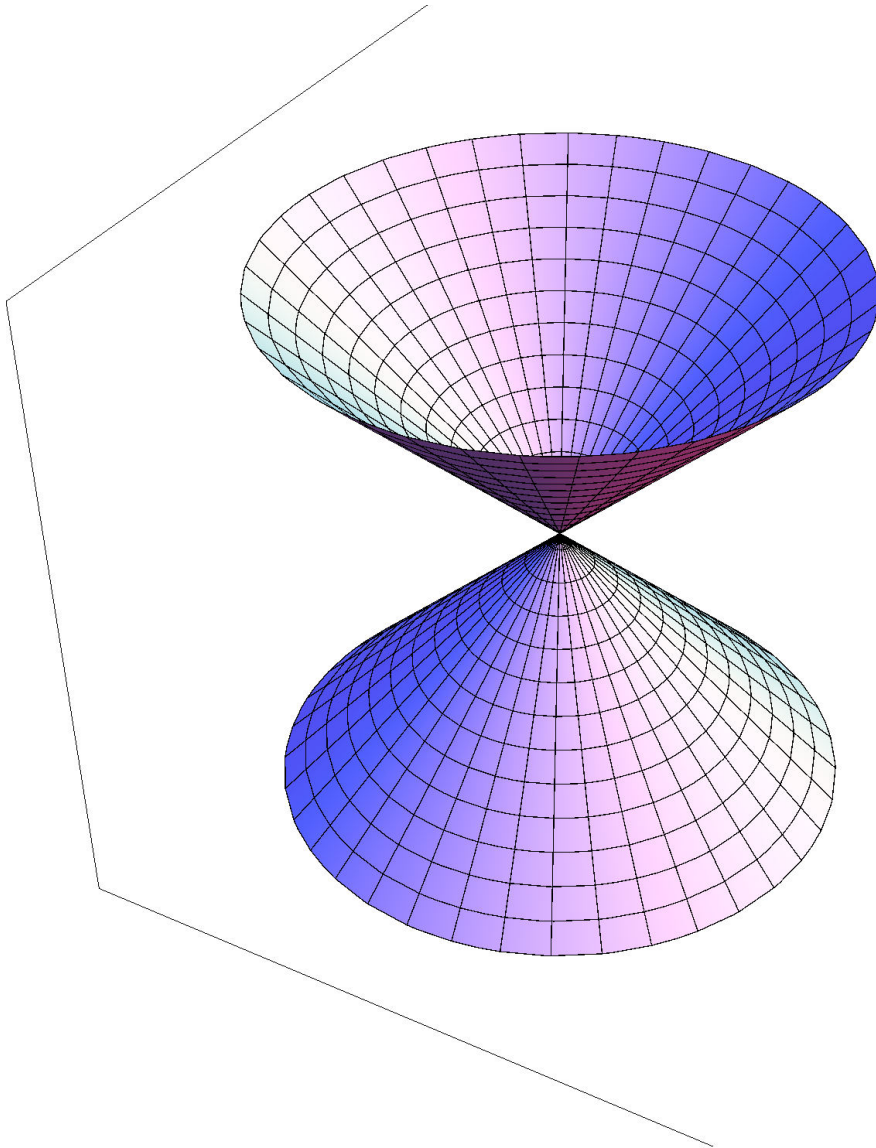


Figura 12.3: Esempio 12.2

Osservazione 12.1 L'equazione di un cono di vertice $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ che non sia l'origine del riferimento è anch'essa determinata da una funzione con particolari proprietà. Infatti se si considera il riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (V, X, Y, Z)$ ottenuto mediante la traslazione del riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ di equazioni:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \\ z = Z + \gamma \end{cases}$$

in cui l'origine del riferimento \mathcal{R}' coincide con il vertice V del cono, l'equazione del cono di vertice V , scritta nel riferimento \mathcal{R}' , è:

$$f(X, Y, Z) = 0,$$

con $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione omogenea di grado k , $k \in \mathbb{R}$. Sostituendo le equazioni della traslazione si ha:

$$f(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma) = 0$$

che è l'equazione del cono di vertice V nel riferimento \mathcal{R} , pertanto f è una funzione omogenea di grado k nelle variabili $(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)$.

Per esempio $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = z^2$ è l'equazione del cono circolare retto con vertice nel punto $V = (1, -1, 0)$.

Secondo Caso Se la direttrice \mathcal{C} del cono è data in forma parametrica:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.3)$$

la retta passante per il punto generico P di \mathcal{C} e per il vertice $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ del cono è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = \alpha + s(x(t) - \alpha) \\ y = \beta + s(y(t) - \beta) \\ z = \gamma + s(z(t) - \gamma), \quad s \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.4)$$

che rappresentano le equazioni parametriche del cono di vertice V e direttrice \mathcal{C} . Eliminando da tali equazioni i parametri t ed s si ottiene l'equazione cartesiana del cono.

Si osservi che se in (12.4):

1. si fissa $t = t_0$ si hanno le equazioni parametriche della generatrice P_0V del cono, dove P_0 è il punto di \mathcal{C} che si ottiene sostituendo in (12.3) al parametro t il valore t_0 ;

2. si fissa $s = s_0$ si hanno le equazioni parametriche di una curva direttrice del cono.

Esercizio 12.2 Scrivere l'equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 0)$ e direttrice la curva:

$$C : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.5)$$

Soluzione Osservato che $V \notin C$, si considera il punto generico $P = (t+1, t-1, t^2-1)$ di C e si scrivono le equazioni parametriche della retta PV :

$$\begin{cases} x = (t+1)s \\ y = (t-1)s \\ z = (t^2-1)s, \quad t, s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

che rappresentano anche le equazioni parametriche del cono e che sono utili, per esempio, per rappresentare graficamente il cono mediante programmi di calcolo simbolico (cfr. Fig. 12.4). Per pervenire, invece, all'equazione cartesiana del cono si devono eliminare i parametri t, s dalle equazioni parametriche, per esempio procedendo in questo modo, da (12.5) si ha:

$$\frac{y}{t-1} = \frac{z}{t^2-1} = \frac{x}{t+1},$$

ossia:

$$\begin{cases} (t+1)y - (t-1)x = 0 \\ (t+1)z - (t^2-1)x = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce:

$$t = \frac{x+y}{x-y},$$

che, sostituita nella seconda, dà luogo all'equazione cartesiana del cono:

$$2x^2z - 2xyz - 4x^2y = 0.$$

Esempio 12.4 L'equazione $x + y + z = 0$ rappresenta un piano π passante per l'origine, ma è anche un cono (infatti è un'equazione omogenea). Il suo vertice è un punto qualsiasi del piano π , una direttrice è una qualsiasi circonferenza di π avente il vertice nel suo interno, oppure contenente il vertice. Si osservi che il cono di vertice un punto del piano e direttrice una retta dello stesso piano non contenente il vertice è il piano stesso privato di una retta (quale?).

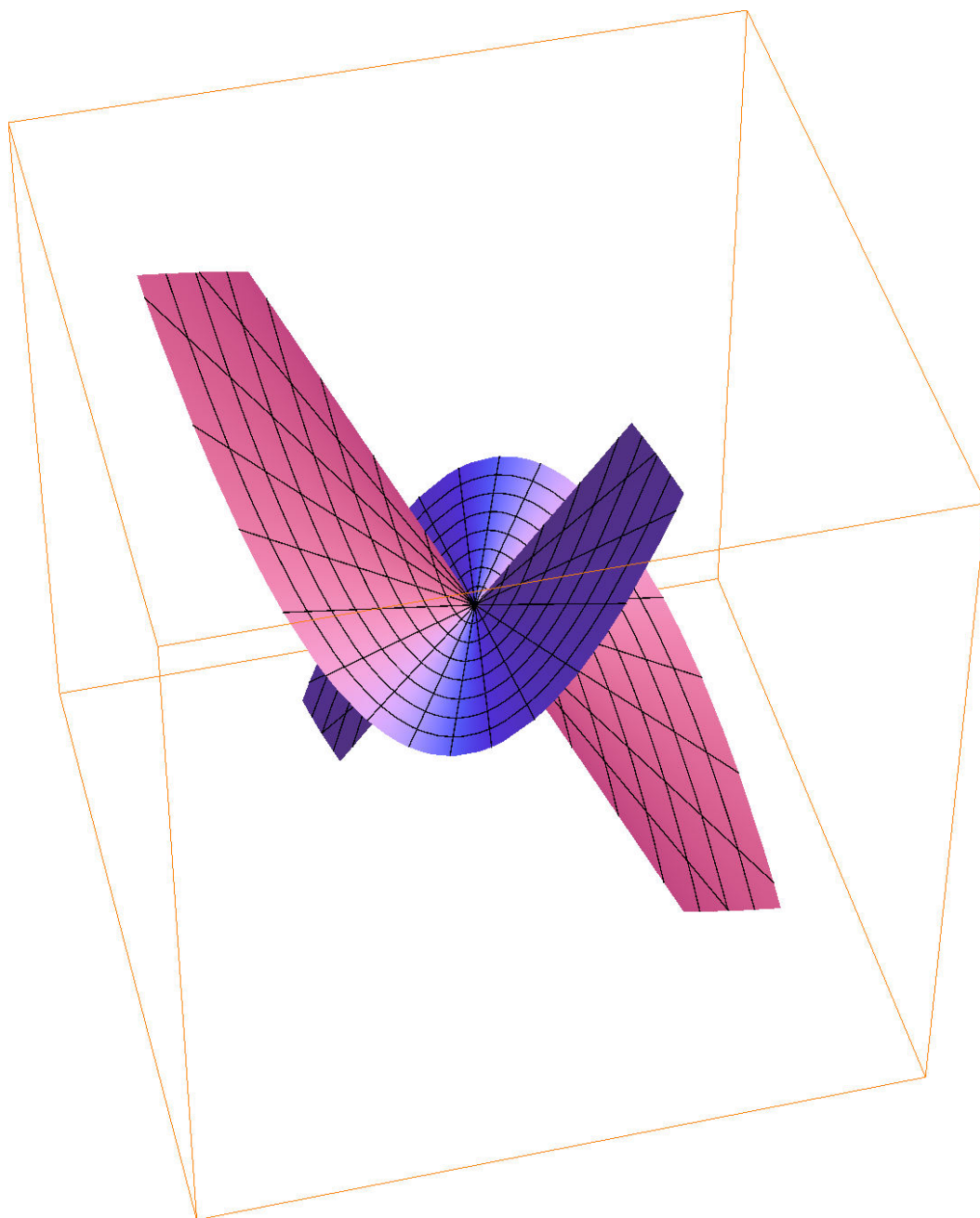


Figura 12.4: Esercizio 12.2

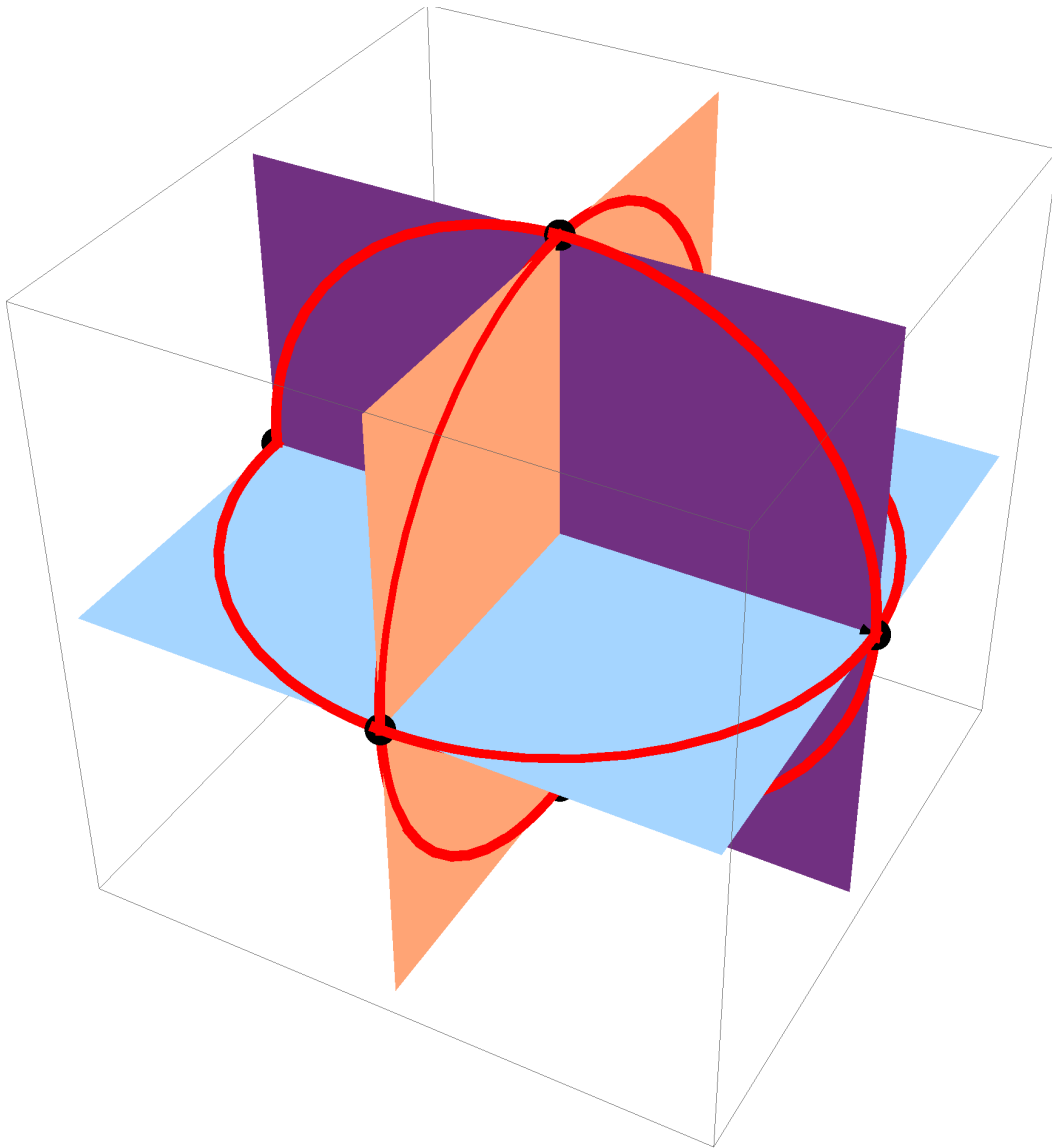


Figura 12.5: Esempio 12.5

Esempio 12.5 L'equazione $xyz = 0$ rappresenta un cono essendo un'equazione omogenea, d'altra parte essa è anche l'unione dei tre piani coordinati. Si può vedere come il cono di vertice l'origine e direttrice la curva:

$$\begin{cases} xyz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

sia l'unione di tre circonferenze. Il cono considerato è rappresentato nella Figura 12.5.

12.2.1 Cono tangente ad una sfera

Dati una sfera Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ e un punto $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ esterno a Σ , si vuole determinare l'equazione del cono di vertice V circoscritto alla sfera Σ , beninteso dopo aver risolto l'esercizio che segue.

Esercizio 12.3 Come si fa a verificare che V è esterno a Σ ?

Intersecando la generica retta passante per il vertice V , di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha + lt \\ y = \beta + mt \\ z = \gamma + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con la sfera Σ si ottiene un'equazione di secondo grado nel parametro t . Si hanno due intersezioni coincidenti (ossia la retta tangente a Σ) imponendo che il discriminante Δ dell'equazione così ottenuta si annulli:

$$\Delta = 0 \tag{12.6}$$

e questa non è altro che un'equazione di secondo grado in l, m, n . Poiché:

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$

si sostituisce a l : $x - \alpha$, a m : $y - \beta$, a n : $z - \gamma$. Tale sostituzione è possibile in quanto l'equazione (12.6) è omogenea. Si perviene così all'equazione del cono cercata.

Esercizio 12.4 Scrivere l'equazione del cono di vertice $V = (2, 0, 0)$ circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

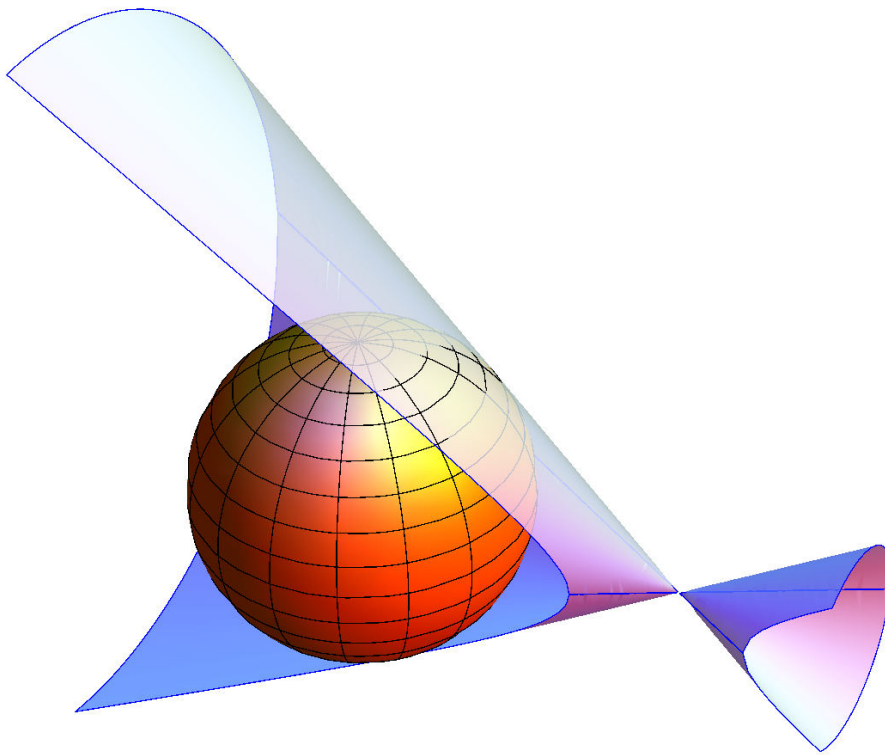


Figura 12.6: Esercizio 12.4

Soluzione La generica retta r passante per V ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + lt \\ y = mt \\ z = nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Intersecando r con Σ si ha l'equazione di secondo grado:

$$(l^2 + m^2 + n^2)t^2 + 4lt + 3 = 0,$$

il cui discriminante è:

$$\frac{\Delta}{4} = l^2 - 3m^2 - 3n^2 = 0.$$

Con la sostituzione di $x - 2, y, z$ al posto di l, m, n , rispettivamente, si ha l'equazione del cono cercata:

$$(x - 2)^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0.$$

Si osservi che si ottiene un'equazione omogenea in $x - 2, y, z$, in accordo con l'Osservazione 12.1. La superficie è rappresentata nella Figura 12.6.

12.2.2 Proiezione di una curva da un punto su un piano

Data una curva \mathcal{C} nello spazio la sua proiezione da un punto P su un piano π è la curva che si ottiene dall'intersezione del piano π con il cono di vertice P e direttrice \mathcal{C} .

Esercizio 12.5 Determinare le equazioni della curva proiezione di:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \\ z = t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

sul piano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$ dal punto $P = (2, 4, -6)$.

Soluzione Si scrivono le equazioni parametriche del cono:

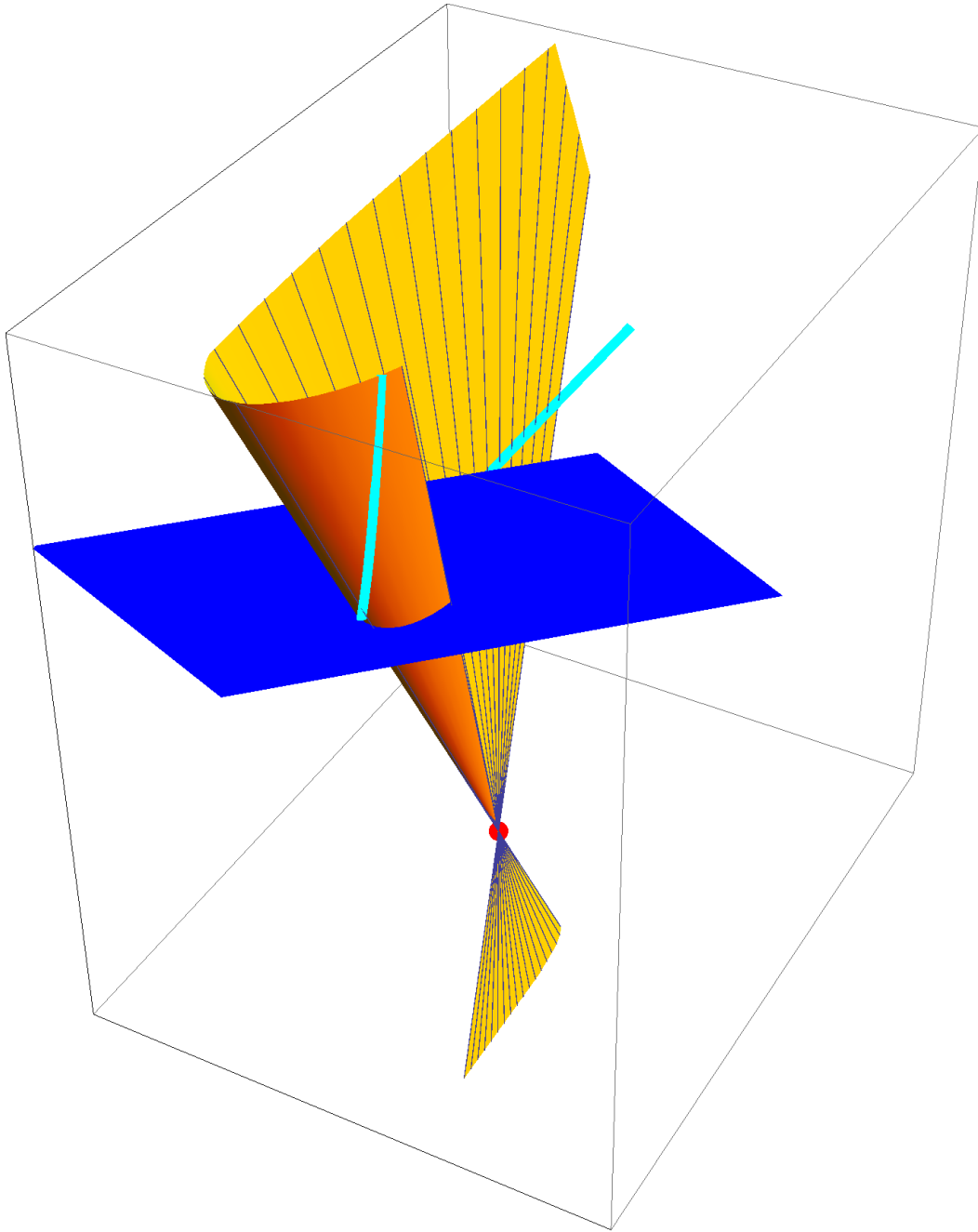


Figura 12.7: Esercizio 12.5

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = 2 + (t - 2)s \\ y = 4 + \left(\frac{1}{t} - 4\right)s \\ z = -6 + (t^3 + 6)s, \quad s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

di vertice P e direttrice la curva \mathcal{C} . Per ottenere la curva proiezione richiesta si interseca il cono \mathcal{S} con il piano π :

$$2 + (t - 2)s - 4 - \left(\frac{1}{t} - 4\right)s - 12 + 2(t^3 + 6)s - 1 = 0,$$

da cui segue:

$$s[t(t - 2) - 1 + 4t + 2t(t^3 + 6)] = 15t.$$

Si ricava s in funzione di t e si sostituisce nelle equazioni parametriche di \mathcal{S} , pervenendo così alle equazioni parametriche della curva richiesta. La situazione geometrica è illustrata nella Figura 12.7.

12.3 Il cilindro

In questo paragrafo sono trattati i cilindri ed in particolare i cilindri aventi generatrici parallele agli assi coordinati. Analogamente a quanto visto per il cono, saranno anche studiati i cilindri circoscritti ad una sfera e la proiezione di una curva su un piano, secondo una direzione assegnata. Vengono poi presentate le coordinate cilindriche che non sono altro che la naturale generalizzazione, al caso dello spazio, delle coordinate polari nel piano (cfr. Par. 9.3).

Definizione 12.3 *Data una curva \mathcal{C} nello spazio ed un vettore \mathbf{u} , il cilindro di direttrice \mathcal{C} e generatrici parallele ad \mathbf{u} è il luogo delle rette dello spazio passanti per tutti i punti di \mathcal{C} e parallele al vettore \mathbf{u} .*

La Figura 12.8 riproduce una rappresentazione grafica della Definizione 12.3.

Per determinare l'equazioni di un cilindro si procede come per il cono.

Primo Caso Sia \mathcal{C} una curva nello spazio rappresentata nella forma:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

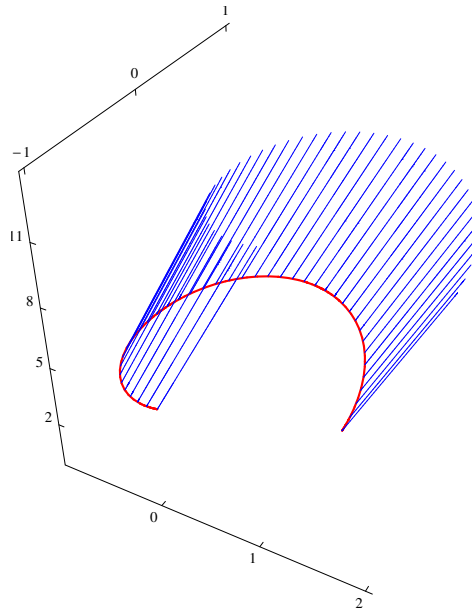


Figura 12.8: Un cilindro

dove f e g sono funzioni da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} , sia $\mathbf{u} = (l, m, n)$ un vettore e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di \mathcal{C} . Si vuole ricavare l'equazione del cilindro di direttrice \mathcal{C} e generatrice la retta per P_0 , parallela ad \mathbf{u} . È evidente che, sullo stesso cilindro, esistono infinite direttrici e infinite generatrici e che il procedimento indicato per ricavare l'equazione del cilindro non dipende dalla scelta della direttrice e della generatrice. Le equazioni parametriche della retta per P_0 parallela ad \mathbf{u} sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove le coordinate di P_0 verificano le identità:

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

Considerando il sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \\ f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

ed eliminando in esso i parametri x_0, y_0, z_0, t , si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro.

Esercizio 12.6 Determinare l'equazione del cilindro avente generatrici parallele all'asse z e direttrice la circonferenza \mathcal{C} appartenente al piano $2x - z = 0$, di centro l'origine $O = (0, 0, 0)$ e raggio 1.

Soluzione La circonferenza \mathcal{C} ha equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartiene a \mathcal{C} , la retta per P_0 parallela all'asse z ha equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e si ha il sistema:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \\ 2x_0 - z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Eliminando i parametri x_0, y_0, z_0 si ottiene:

$$\begin{cases} 2x - (z - t) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - t)^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui, ricavando t dalla prima equazione e sostituendo l'espressione ottenuta nella seconda, si ha:

$$5x^2 + y^2 = 1$$

che è l'equazione del cilindro, rappresentato nella Figura 12.9.

Secondo Caso Sia \mathcal{C} una curva dello spazio data in forma parametrica:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

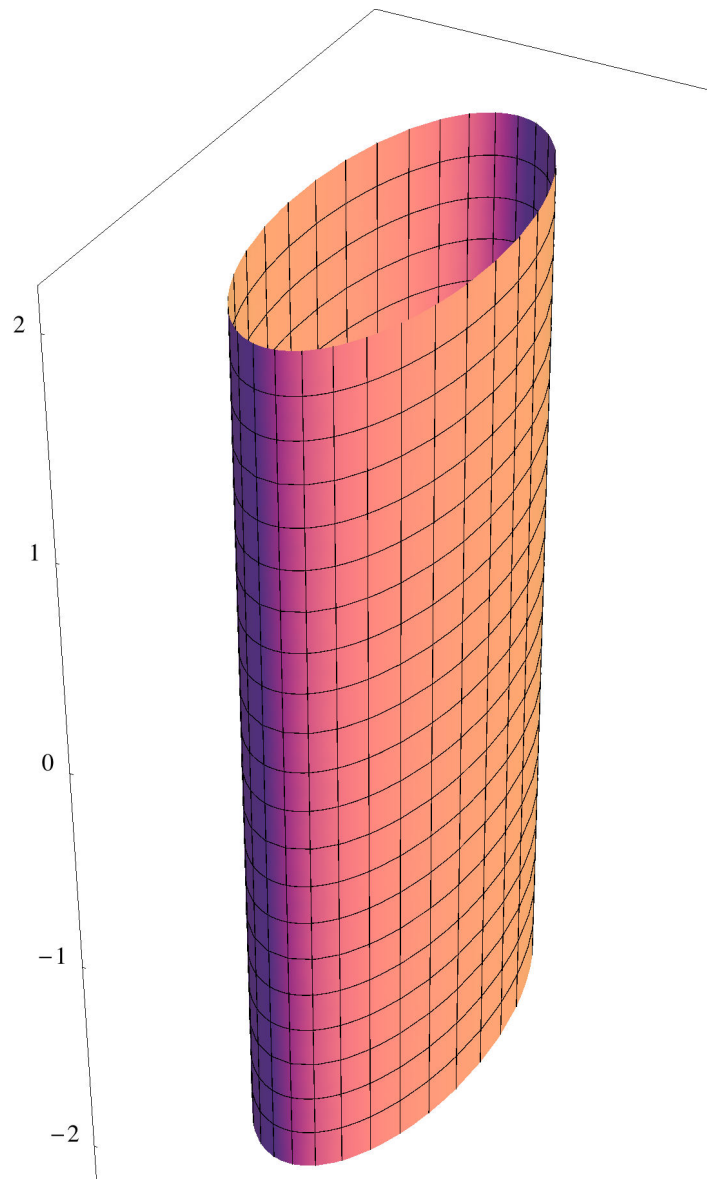


Figura 12.9: Esercizio 12.6

e sia $\mathbf{u} = (l, m, n)$ un vettore. La retta passante per il generico punto $P = (x(t), y(t), z(t))$ di \mathcal{C} , parallela ad \mathbf{u} , ha equazioni:

$$\begin{cases} x = x(t) + ls \\ y = y(t) + ms \\ z = z(t) + ns, \quad s, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.7)$$

che non sono altro che le *equazioni parametriche* del cilindro di direttrice \mathcal{C} e generatrici parallele al vettore \mathbf{u} , nei parametri s, t . Volendo determinare l'equazione cartesiana del cilindro è sufficiente eliminare s e t tra le equazioni parametriche (12.7). Come nel caso del cono, si osservi che, fissando t in (12.7) si hanno le equazioni parametriche di una direttrice, invece, fissando s si hanno le equazioni parametriche di una generatrice.

Esercizio 12.7 Determinare l'equazione del cilindro avente generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ e direttrice la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione Sia $P = (t^2, t, t - 1)$ un punto qualsiasi di \mathcal{C} , le equazioni parametriche della generica generatrice sono:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2\lambda \\ y = t - \lambda \\ z = t - 1 + \lambda, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

che rappresentano anche le equazioni parametriche del cilindro. Si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro:

$$x - \left(\frac{y+z+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-z-1}{2}\right) = 0,$$

eliminando i parametri t e λ dalle sue equazioni parametriche. La rappresentazione grafica (cfr. Fig. 12.10) del cilindro è stata, invece, ottenuta usando le sue equazioni parametriche.

12.3.1 Cilindri con assi paralleli agli assi coordinati

Nell'equazione $5x^2 + y^2 = 1$ del cilindro ottenuta nell'Esempio 12.6 si osserva che non compare la coordinata z , questa è condizione necessaria e sufficiente affinché le

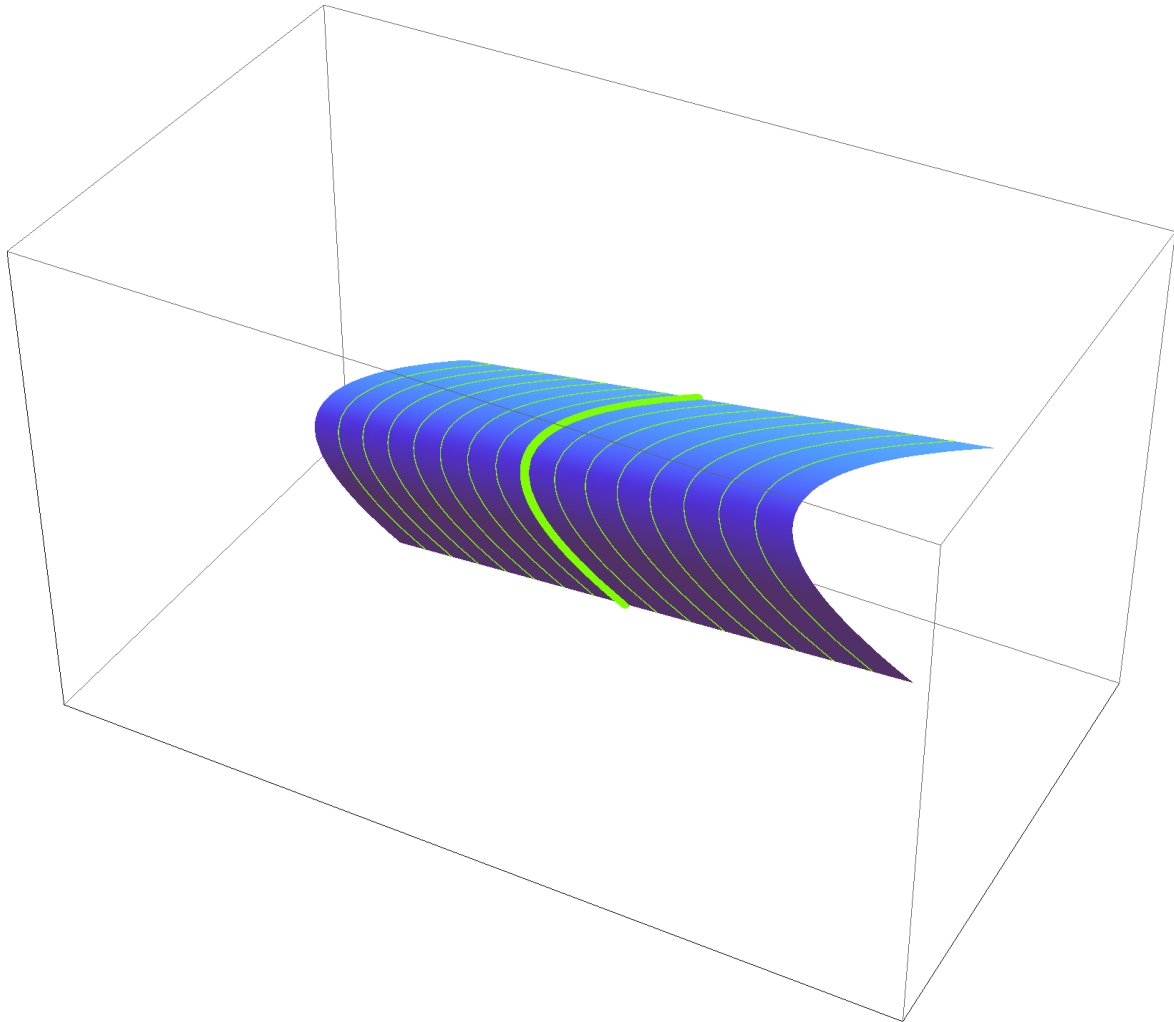


Figura 12.10: Esercizio 12.7

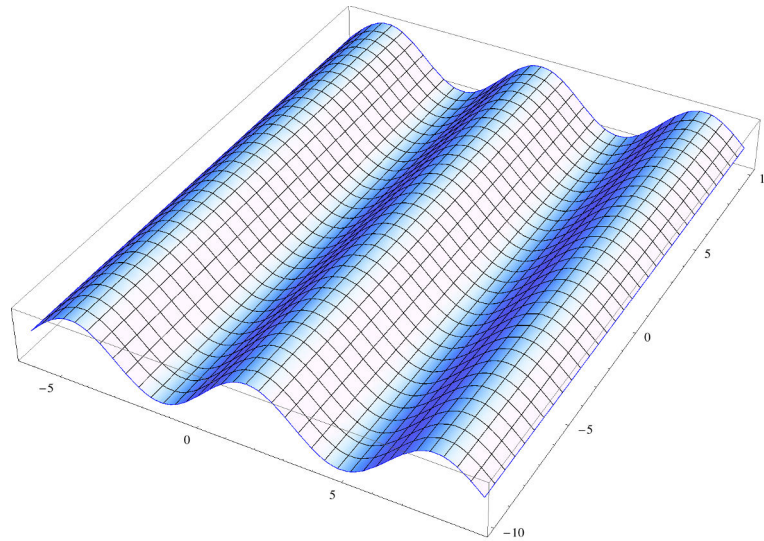


Figura 12.11: Esempio 12.6

generatrici del cilindro siano parallele all'asse z . Infatti se le generatrici sono parallele all'asse z e la direttrice del cilindro è una curva \mathcal{C} del piano coordinato xy di equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

con f funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} , per ogni punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente a \mathcal{C} si ha che anche i punti $P'_0 = (x_0, y_0, \lambda z_0)$ appartengono a \mathcal{C} per ogni valore reale di λ .

Esempio 12.6 $y = \sin x$ è l'equazione di un cilindro con generatrici parallele all'asse z la cui rappresentazione grafica è illustrata nella Figura 12.11.

Analogamente, se le generatrici di un cilindro sono parallele all'asse x e la direttrice è una curva del piano coordinato yz di equazioni $f(y, z) = x = 0$, l'equazione cartesiana del cilindro è $f(y, z) = 0$.

Esempio 12.7 $y^2 + z^2 = 5$ è l'equazione di un cilindro con generatrici parallele all'asse x la cui rappresentazione grafica è illustrata nella Figura 12.12.

Infine se le generatrici di un cilindro sono parallele all'asse y e la direttrice è una curva del piano coordinato xz di equazioni $f(x, z) = y = 0$ l'equazione cartesiana del cilindro è $f(x, z) = 0$.

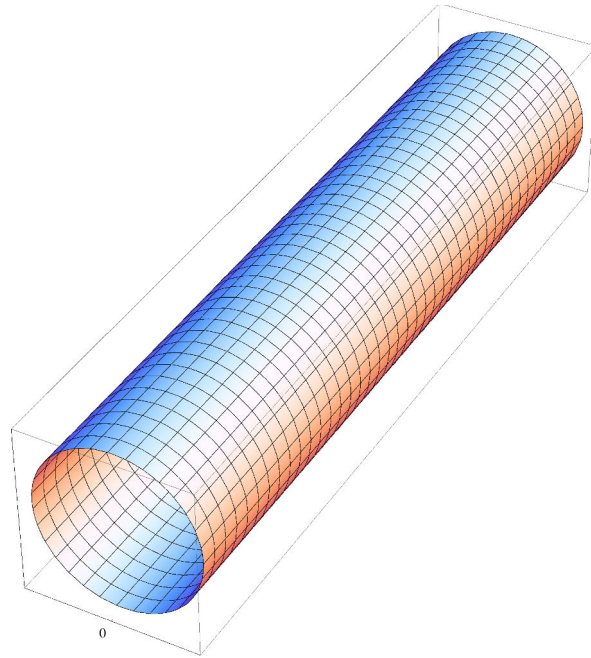


Figura 12.12: Esempio 12.7

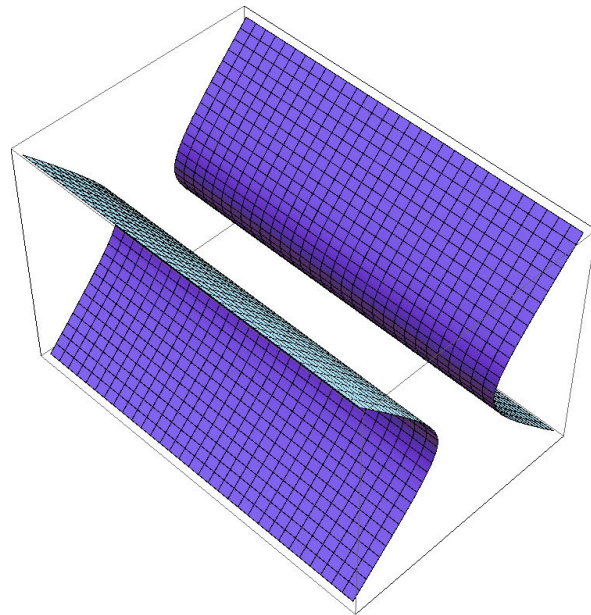


Figura 12.13: Esempio 12.8

Esempio 12.8 $x^2 - z^2 = 2$ è l'equazione di un cilindro con generatrici parallele all'asse y la cui rappresentazione grafica è illustrata nella Figura 12.13.

Se un cilindro ha come direttrice la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

e generatrici parallele all'asse z , eliminando il parametro u tra due equazioni parametriche e sostituendo l'espressione ottenuta nella terza si perviene alla sua equazione cartesiana.

Esercizio 12.8 Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro avente come direttrice la curva \mathcal{C} di equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = u^3 \\ y = u^2 \\ z = u, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e generatrici parallele all'asse z .

Soluzione Dalle equazioni della curva segue $x^2 = u^6$, $y^3 = u^6$, allora:

$$x^2 - y^3 = 0$$

è l'equazione cercata. La curva di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

è la proiezione di \mathcal{C} sul piano xy . Il cilindro così ottenuto e la curva \mathcal{C} sono rappresentati nella Figura 12.14.

Il cilindro che ha come direttrice la curva \mathcal{C} di equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

con f e g funzioni da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} , e generatrici parallele all'asse z ha equazione cartesiana che si ottiene eliminando l'incognita z tra le equazioni di \mathcal{C} .

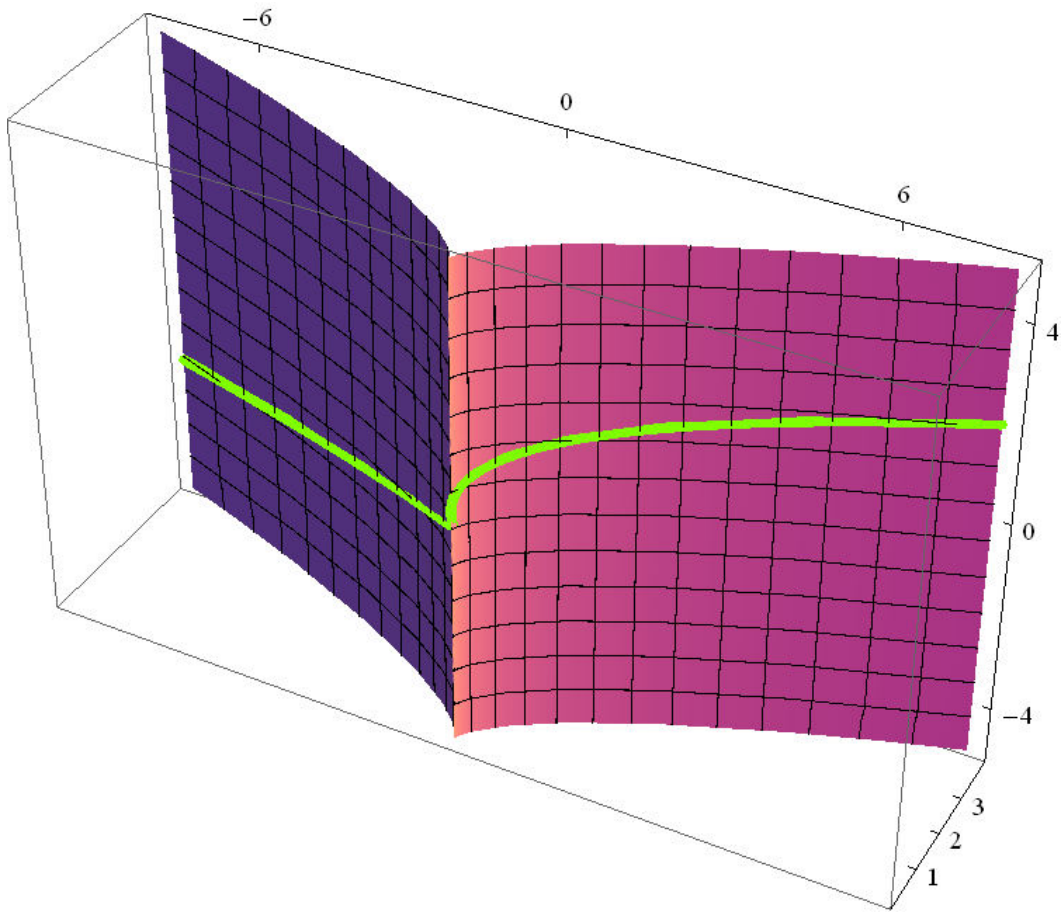


Figura 12.14: Esercizio 12.8

Esercizio 12.9 Determinare l'equazione del cilindro che proietta la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

parallelamente all'asse z .

Soluzione Eliminando z tra le due equazioni di \mathcal{C} si ottiene:

$$x^2 + y^2 + (2x + y)^2 = 1.$$

Si procede in modo analogo per determinare l'equazione cartesiana di un cilindro con generatrici parallele agli altri assi coordinati.

Come nel caso del cono, anche per il cilindro si può dimostrare il seguente teorema che ne caratterizza l'equazione cartesiana. Per la sua dimostrazione si veda ad esempio [12].

Teorema 12.2 1. *Sia:*

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

una retta e sia $\psi(u, v)$ una funzione di due variabili reali a valori reali. Allora l'equazione:

$$\psi(a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \quad (12.8)$$

rappresenta un cilindro con generatrici parallele a r .

2. *Viceversa, se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione di un cilindro con generatrici parallele ad una retta r , allora esiste una funzione di due variabili reali $\psi(u, v)$ a valori reali tale che il cilindro abbia anche equazione (12.8).*

12.3.2 Cilindro circoscritto ad una sfera

Dati una sfera:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

e un vettore $\mathbf{u} = (l, m, n)$, si vuole determinare l'equazione del cilindro circoscritto a Σ con generatrici parallele ad \mathbf{u} . La generica retta parallela ad \mathbf{u} e passante per un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ di Σ ha equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.9)$$

dove (x, y, z) sono le coordinate di un punto generico della retta, vale a dire le coordinate del generico punto della superficie cercata. Analogamente a quanto già visto per il cono, se si interseca Σ con la retta di equazioni parametriche (12.9) si ottiene un'equazione di secondo grado in t , le cui soluzioni portano ai punti di intersezione tra la sfera e la retta. Le generatrici sono tangenti a Σ se le intersezioni coincidono, ovvero se il discriminante dell'equazione è nullo. L'equazione in x, y, z che così si ottiene rappresenta, come è visualizzato nella Figura 12.15, il cilindro circoscritto a Σ con generatrici parallele al vettore \mathbf{u} . In geometria euclidea questo cilindro è detto *cilindro circolare retto* in quanto ha come direttrici le circonferenze che appartengono a piani paralleli, tutte con lo stesso raggio e con i centri tutti su una retta, detta *asse del cilindro*, ortogonale ai piani a cui esse appartengono. Nel Paragrafo 12.4 si vedrà che un cilindro circolare retto si può anche ottenere dalla rotazione completa di una retta intorno ad un'altra retta ad essa parallela che è l'asse del cilindro.

Esercizio 12.10 Scrivere l'equazione del cilindro circoscritto alla sfera:

$$\Sigma : (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 3$$

ed avente le generatrici parallele al vettore $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$.

Soluzione Le equazioni della retta passante per un punto generico $P = (x_0, y_0, z_0)$ di Σ e parallela al vettore \mathbf{u} sono date da:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Intersecando Σ con r si ottiene l'equazione di secondo grado in t :

$$2t^2 + 2(x - 1 + z)t + (x^2 - 2x - 2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Imponendo la tangenza tra r e Σ segue:

$$\frac{\Delta}{4} = (x + z - 1)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2) = 0$$

che è l'equazione del cilindro cercata.

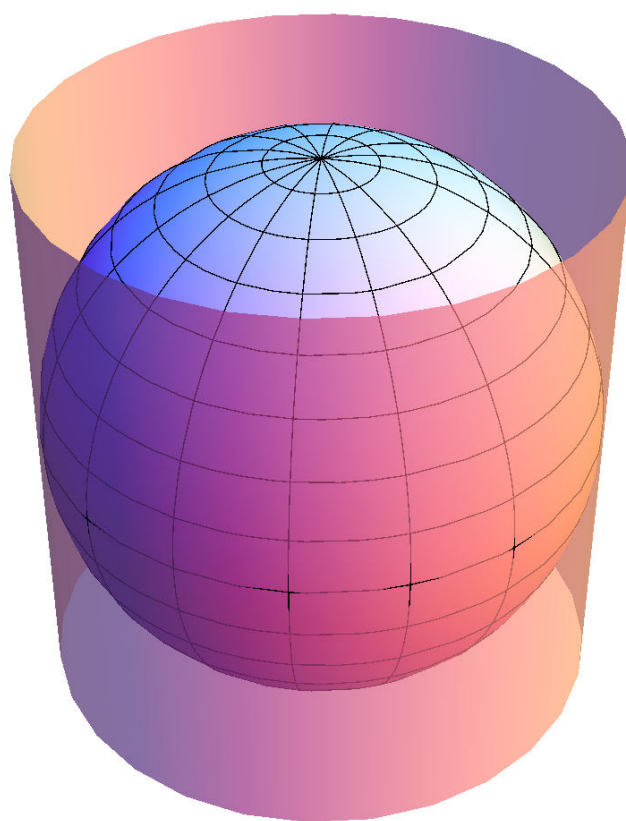


Figura 12.15: Cilindro circoscritto ad una sfera

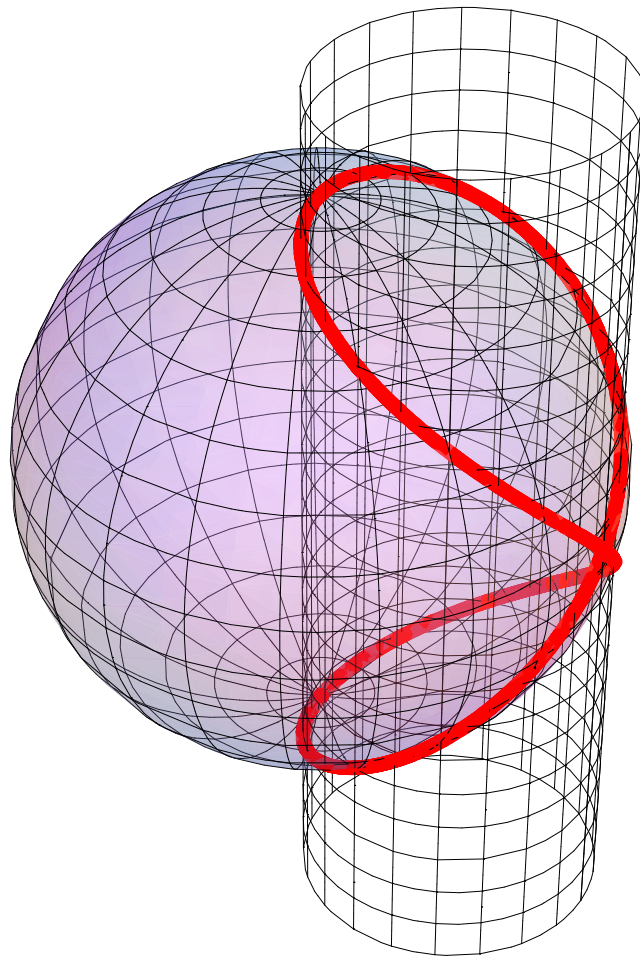


Figura 12.16: La curva di Viviani

Curiosità È famosa la curva che si ottiene intersecando il cilindro circolare retto di equazione:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

con la sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

La curva, rappresentata nella Figura 12.16, prende il nome di *curva di Viviani*, in quanto Vincenzo Viviani (1622 – 1703), studente di Galileo scoprì che questa curva risolve il seguente problema: *quanto misura il lato di quattro finestre uguali, costruite su un emisfero in modo che la parte di esso rimanente abbia l'area di un quadrato?* Per maggiori dettagli ed approfondimenti si veda ad esempio [11].

12.3.3 Proiezione di una curva su un piano secondo una direzione assegnata

Data una curva \mathcal{C} nello spazio, la proiezione di \mathcal{C} su un piano π secondo la direzione di un vettore \mathbf{u} , non parallelo a π , è la curva ottenuta dall'intersezione del piano π con il cilindro di direttrice \mathcal{C} e generatrici parallele al vettore \mathbf{u} .

Esercizio 12.11 Data la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2t \\ z = t + 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

determinare la proiezione ortogonale \mathcal{C}' di \mathcal{C} sul piano $\pi : x - 2y = 0$.

Soluzione La curva \mathcal{C}' è l'intersezione del piano π con il cilindro \mathcal{S} avente le generatrici parallele al vettore $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, ortogonale al piano π , e direttrice \mathcal{C} . Dalle equazioni parametriche del cilindro:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = 1 - t^2 + s \\ y = 2t - 2s \\ z = t + 2, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R},$$

ricavando, dalla terza equazione $t = z - 2$ e dalla seconda equazione:

$$s = \frac{-y + 2z - 4}{2},$$

quindi sostituendo nella prima, si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro:

$$\mathcal{S} : x = 1 - (z - 2)^2 + \frac{2z - 4 - y}{2}.$$

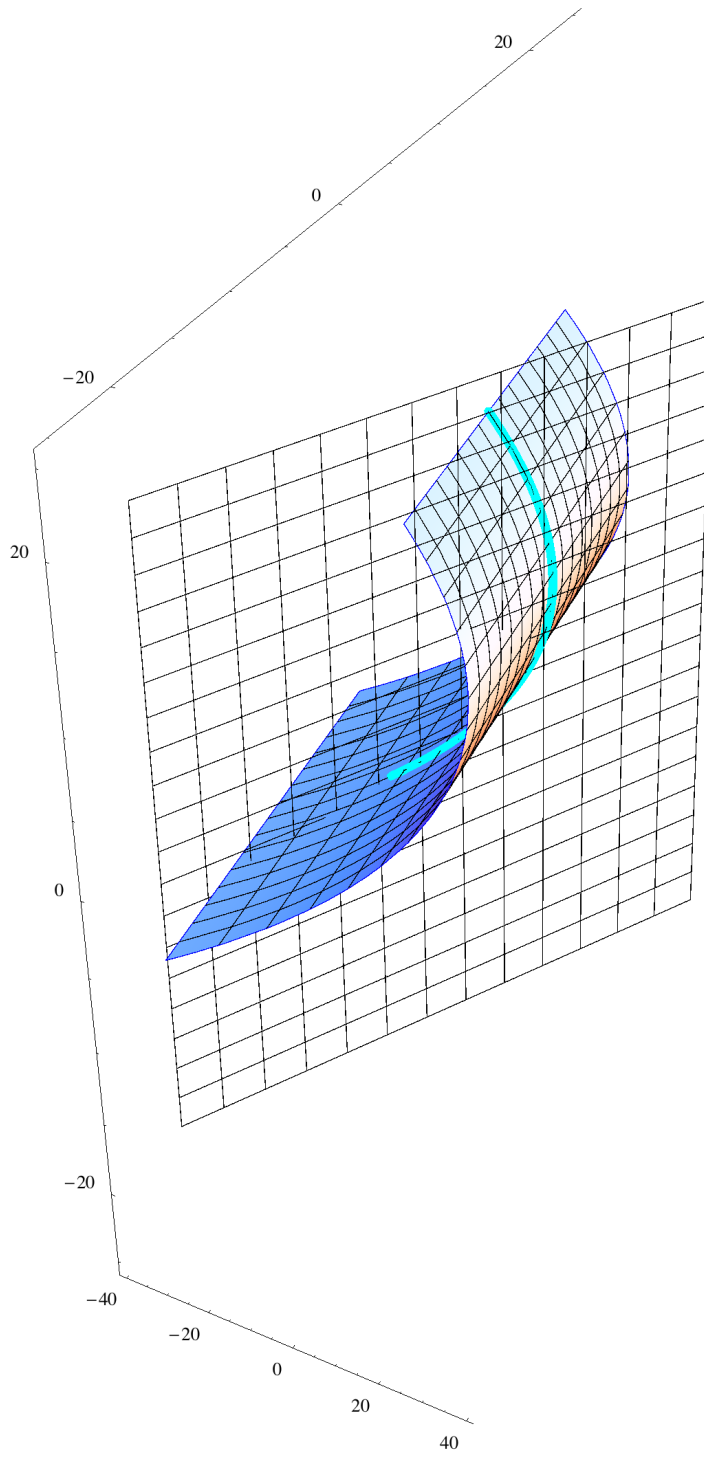


Figura 12.17: Esercizio 12.11

La curva C' è quindi data da:

$$C' : \begin{cases} x = 1 - (z - 2)^2 + \frac{2z - 4 - y}{2} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

ed è rappresentata nella Figura 12.17.

12.3.4 Coordinate cilindriche

In questo paragrafo si introduce un altro sistema di coordinate, che estende al caso dello spazio, in modo diverso dal sistema di coordinate polari sferiche (cfr. Par. 11.10), la nozione di coordinate polari nel piano.

Si consideri il sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dello spazio ordinario ed il riferimento polare del piano associato a quello cartesiano $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ definito nel Paragrafo 9.3. Se (x, y, z) sono le coordinate cartesiane di un punto P dello spazio (non appartenente all'asse z) e (ρ, θ) sono le coordinate polari della sua proiezione ortogonale P' sul piano $z = 0$, la terna di numeri reali (ρ, θ, z) , nell'ordine scritto, individua le *coordinate cilindriche* del punto P . Il relativo riferimento si ottiene aggiungendo al riferimento polare del piano xy (che determina ρ e θ) l'asse z del riferimento cartesiano associato. Si ha allora una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio e le terne ordinate (ρ, θ, z) , dove:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

con l'eccezione dei punti dell'asse z per i quali θ è indeterminata. La situazione geometrica è illustrata nella Figura 12.18.

Le relazioni che legano le coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane del medesimo punto P sono:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z; \end{cases}$$

per le formule inverse si trova:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \\ z = z. \end{cases}$$

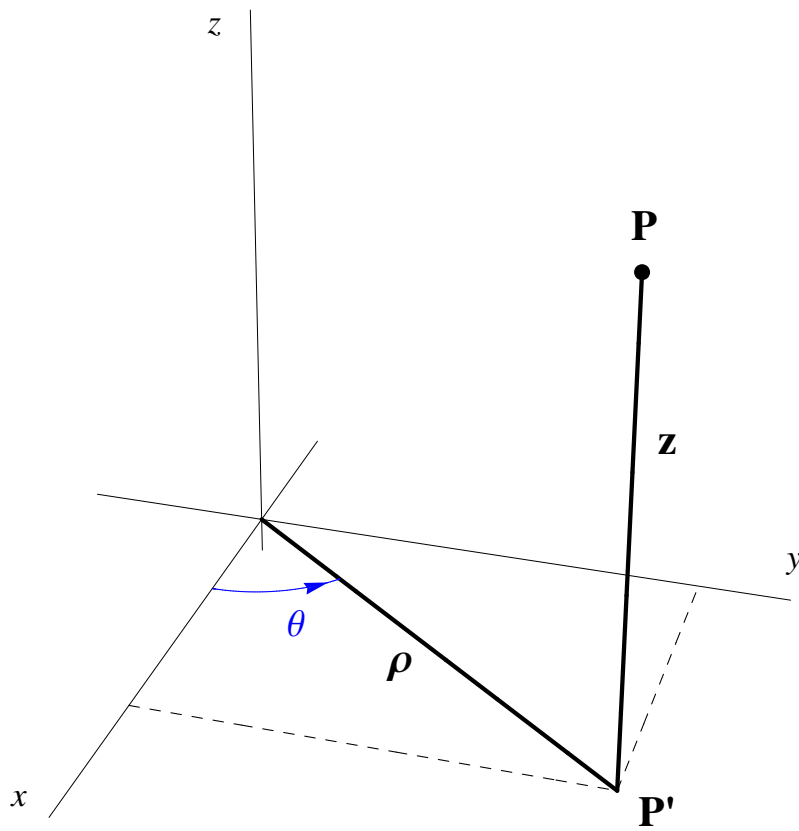


Figura 12.18: Coordinate cilindriche del punto P

Osservazione 12.2 I punti $P = (\rho, \varphi, z)$, con $\rho = r$ costante, appartengono al cilindro circolare retto \mathcal{S} di asse z e raggio r , perciò:

$$\rho = r$$

rappresenta l'equazione di \mathcal{S} in coordinate cilindriche. Le sue equazioni parametriche sono:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

mentre è immediato verificare che:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

è la sua equazione cartesiana.

Osservazione 12.3 Un punto $P = (\rho_0, \varphi_0, z_0)$ è pertanto l'intersezione di tre superfici: un cilindro circolare retto di asse l'asse z e raggio $r = \rho_0$, un semipiano per l'asse z formante un angolo φ_0 con il piano $y = 0$ e il piano $z = z_0$, del relativo riferimento cartesiano associato.

12.4 Superfici di rotazione

In questo paragrafo si introduce il concetto, del resto molto intuitivo, di superficie di rotazione di una curva intorno ad una retta e se ne ricavano le equazioni, studiando diversi casi particolari.

Definizione 12.4 *Date una retta a e una curva \mathcal{C} la superficie \mathcal{S} generata dalla rotazione completa della curva \mathcal{C} intorno alla retta a prende il nome di superficie di rotazione di asse di rotazione a . Ogni punto P di \mathcal{C} , ad eccezione dei punti di intersezione di \mathcal{C} con la retta a che sono punti di \mathcal{S} , descrive una circonferenza appartenente al piano ortogonale alla retta a passante per P . Tali circonferenze prendono il nome di paralleli di \mathcal{S} , mentre le curve ottenute intersecando \mathcal{S} con i piani passanti per a sono dette curve meridiane. La situazione geometrica è illustrata nella Figura 12.19.*

- Esempio 12.9**
1. Una sfera è una superficie di rotazione avente per asse di rotazione una qualunque retta passante per il suo centro. Quali sono le sue curve meridiane?
 2. Il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ è una superficie di rotazione avente per asse di rotazione l'asse z . Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un qualunque punto del cilindro, l'intersezione del cilindro con il piano $\pi : z = z_0$ (piano per P_0 ortogonale all'asse z) è la circonferenza $\mathcal{C} : z - z_0 = x^2 + y^2 - 4 = 0$. In questo caso, quali sono le curve meridiane?

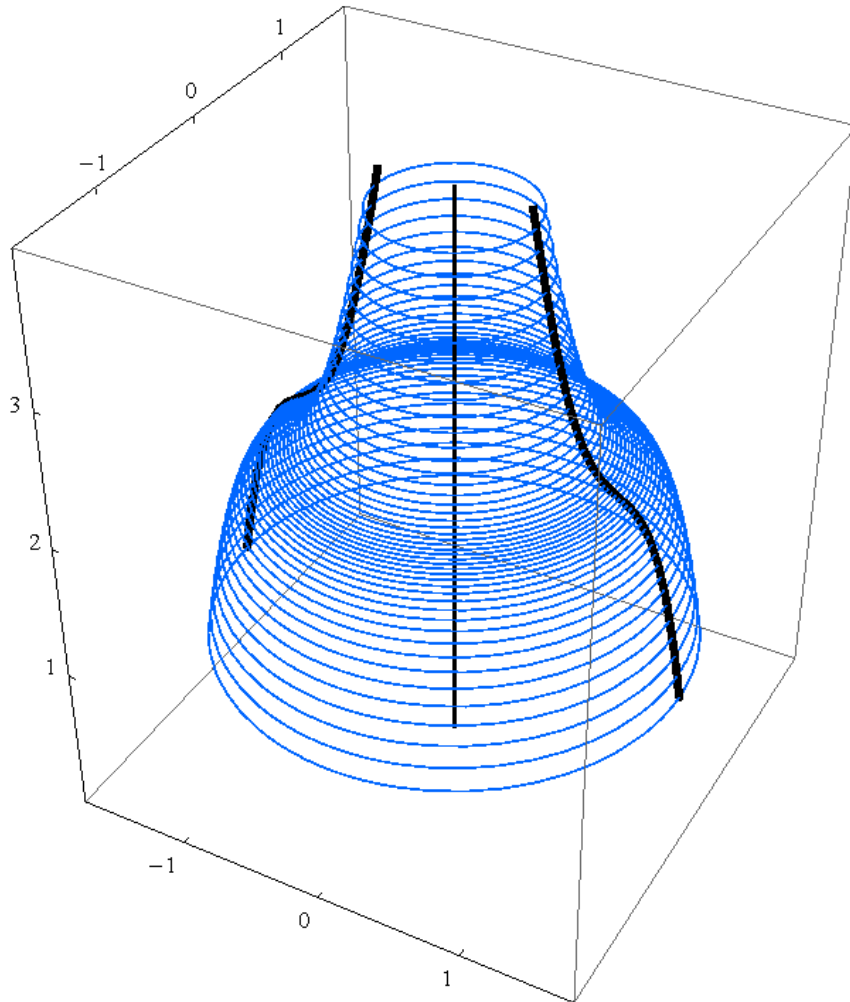


Figura 12.19: Una generica superficie di rotazione

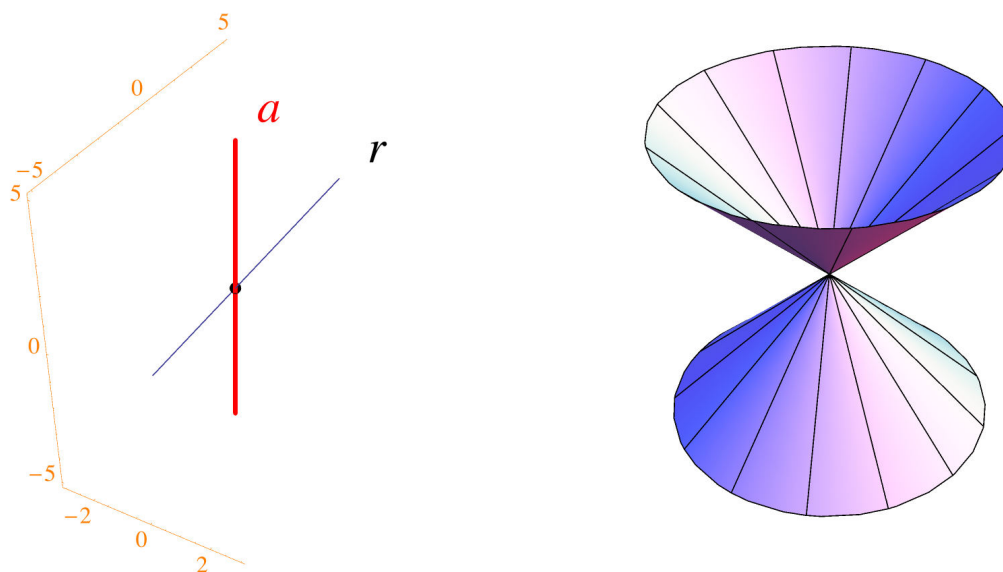


Figura 12.20: Le rette a e r e il cono ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a

In questo paragrafo sarà anche studiato il caso particolare in cui la curva \mathcal{C} è piana, giace su un piano coordinato e ruota intorno ad un asse coordinato. Particolari esempi di questo tipo sono le rotazioni di un'ellisse, di un'iperbole e di una parabola intorno ad un opportuno asse coordinato, ottenendo alcune superfici di rotazione che sono esempi di *quadriche*. Le quadriche sono superfici che si possono esprimere mediante equazioni di secondo grado e saranno studiate nel Paragrafo 12.6. Si esaminerà, infine, la rotazione intorno all'asse z di una circonferenza posta sul piano $x = 0$, avente il centro nel punto di coordinate $(0, a, 0)$ e raggio r ; la superficie che ne risulta è detta *toro* o *superficie torica*.

Esempio 12.10 Se la curva \mathcal{C} della Definizione 12.4 è una retta r incidente l'asse di rotazione a , allora la superficie di rotazione è un cono circolare retto. La Figura 12.20 rappresenta le rette incidenti r e a e il cono ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a .

Esempio 12.11 Se la curva \mathcal{C} della Definizione 12.4 è una retta r parallela all'asse di rotazione a , allora la superficie di rotazione è un cilindro circolare retto. La Figura 12.21 rappresenta le rette parallele r e a e il cilindro ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a .

Esempio 12.12 Se la curva \mathcal{C} della Definizione 12.4 è una retta r sghemba con l'asse di rotazione a allora la superficie di rotazione è un *iperboloide di rotazione ad una falda*,

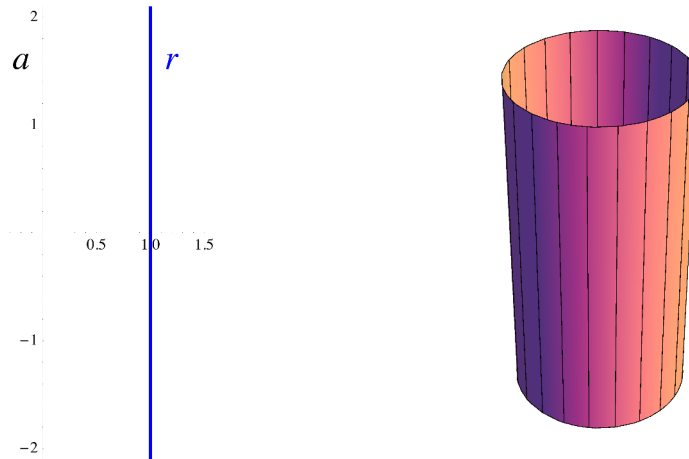


Figura 12.21: Le rette a e r e il cilindro ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a

superficie che sarà studiata in dettaglio nel Paragrafo 12.6. La Figura 12.22 rappresenta le rette sghembe r e a e l'iperboloide ad una falda ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a .

Per pervenire all'equazione di una superficie di rotazione S è sufficiente scrivere le equazioni di un suo generico parallelo, come si vedrà negli esempi e negli esercizi che seguono.

Esercizio 12.12 Date le rette:

$$r : \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare la superficie generata dalla rotazione di r intorno a s e decidere di quale superficie si tratta.

Soluzione Il punto generico P della retta r descrive la circonferenza \mathcal{C} intersezione del piano π passante per P e ortogonale a s con la sfera Σ di centro C , punto di intersezione tra π e s , e raggio la distanza $d(P, C)$ da P a C . Il punto P di r ha coordinate:

$$P = (t + 1, t, -t + 2),$$

il piano π passante per P perpendicolare ad un vettore parallelo a s , quindi di componenti per esempio $(0, 1, 0)$, ha equazione $y - t = 0$. Il centro C della circonferenza \mathcal{C} è l'intersezione di π con la retta s e perciò $C = (1, t, 0)$, il raggio di \mathcal{C} è:

$$d(C, P) = \sqrt{t^2 + (-t + 2)^2}.$$

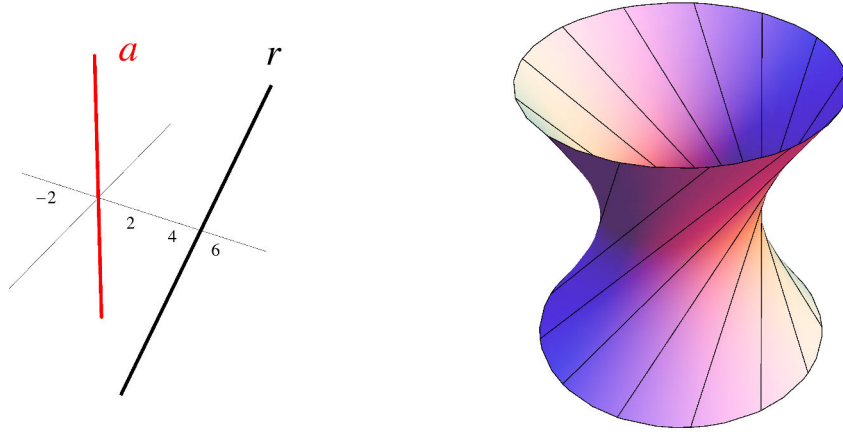


Figura 12.22: Le rette a e r e l'iperboloide ottenuto dalla rotazione di r intorno ad a

Si può allora scrivere la circonferenza \mathcal{C} come intersezione di Σ con π nel modo seguente:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y - t = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - t)^2 + z^2 = t^2 + (-t + 2)^2. \end{cases} \quad (12.10)$$

Eliminando il parametro t tra le due equazioni di (12.10) si ottiene l'equazione della superficie di rotazione:

$$(x - 1)^2 + z^2 - 2(y - 1)^2 - 2 = 0$$

che è l'iperboloide di rotazione ad una falda rappresentato nella Figura 12.23.

L'esercizio precedente indica il metodo con cui si possono ricavare le equazioni di tutte le superfici di rotazione ottenute dalla rotazione completa di una retta intorno all'asse di rotazione. Viene ora affrontato il caso della rotazione di una curva piana \mathcal{C} che non sia necessariamente una retta e che ruota intorno ad una retta contenuta nello stesso piano a cui appartiene \mathcal{C} . Ci si può ridurre, con un opportuno cambiamento di riferimento, a studiare la rotazione di una curva \mathcal{C} appartenente al piano coordinato xz intorno all'asse z , quindi di equazioni del tipo:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

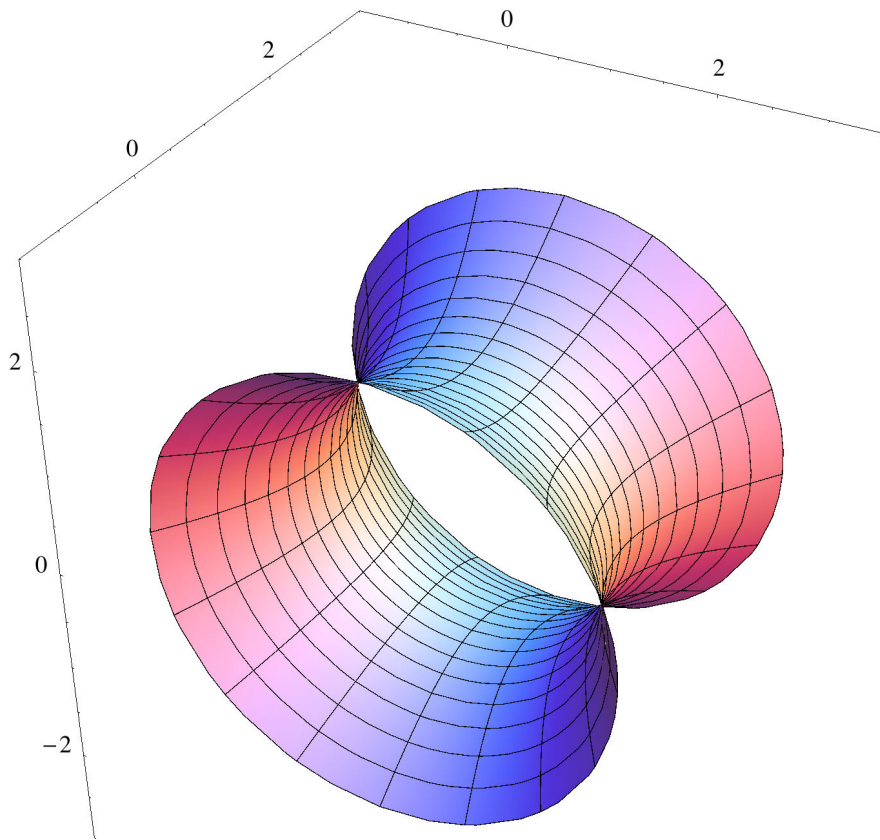


Figura 12.23: Esercizio 12.12

dove f indica una funzione nelle variabili x e z , a valori reali. Un generico punto P di \mathcal{C} ha coordinate del tipo $P = (x, 0, z)$. Sia $Q = (X, Y, Z)$ un punto appartenente al parallelo della superficie \mathcal{S} , ottenuta dalla rotazione di \mathcal{C} intorno all'asse z , passante per P . Le equazioni del parallelo per Q sono date dall'intersezione del piano π passante per $P = (x, 0, z)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, che ha equazione $Z = z$, con la sfera di centro $C = (0, 0, Z)$ e raggio:

$$d(P, C) = \sqrt{x^2} = |x|,$$

ossia:

$$\begin{cases} Z = z \\ X^2 + Y^2 + (Z - Z)^2 = x^2, \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{X^2 + Y^2} \\ z = Z. \end{cases}$$

Di conseguenza, per ottenere l'equazione della superficie di rotazione \mathcal{S} è sufficiente sostituire nell'equazione $f(x, z) = 0$ le espressioni:

$$x = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad z = Z.$$

In modo analogo si possono scrivere le equazioni delle superfici di rotazione ottenute dalla rotazione di una curva appartenente agli altri piani coordinati e che ruoti intorno ad un asse coordinato dello stesso piano a cui la curva appartiene.

Esercizio 12.13 Scrivere l'equazione della superficie \mathcal{S} ottenuta dalla rotazione completa dell'iperbole, appartenente al piano coordinato xz , di equazione:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (12.11)$$

intorno all'asse z .

Soluzione Da quanto precede è sufficiente sostituire a x^2 l'espressione $x^2 + y^2$, si ricava:

$$\mathcal{S} : \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (12.12)$$

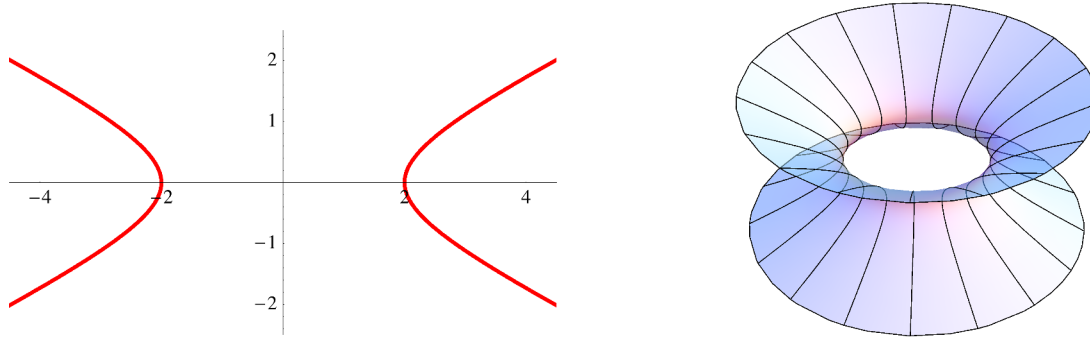


Figura 12.24: Iperbole di equazione (12.11) e iperboloide di equazione (12.12)

che è di nuovo un *iperboloide di rotazione ad una falda*. Nella Figura 12.24 sono rappresentati sia un'iperbole di equazione (12.11) sia la superficie di rotazione di equazione (12.12).

Esercizio 12.14 Scrivere l'equazione della superficie \mathcal{S} ottenuta dalla rotazione completa dell'ellisse, appartenente al piano coordinato xz , di equazione:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (12.13)$$

intorno all'asse z .

Soluzione È sufficiente sostituire al posto di x^2 l'espressione $x^2 + y^2$ e si ottiene:

$$\mathcal{S} : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (12.14)$$

che rappresenta una superficie detta *ellissoide di rotazione* e che sarà studiata dettagliatamente nel Paragrafo 12.6. Nella Figura 12.25 si vedono un'ellisse di equazione (12.13) e un ellissoide di rotazione di equazione (12.14).

Esercizio 12.15 Scrivere l'equazione della superficie \mathcal{S} ottenuta dalla rotazione completa dell'iperbole del piano xz di equazione (12.11) intorno all'asse x .

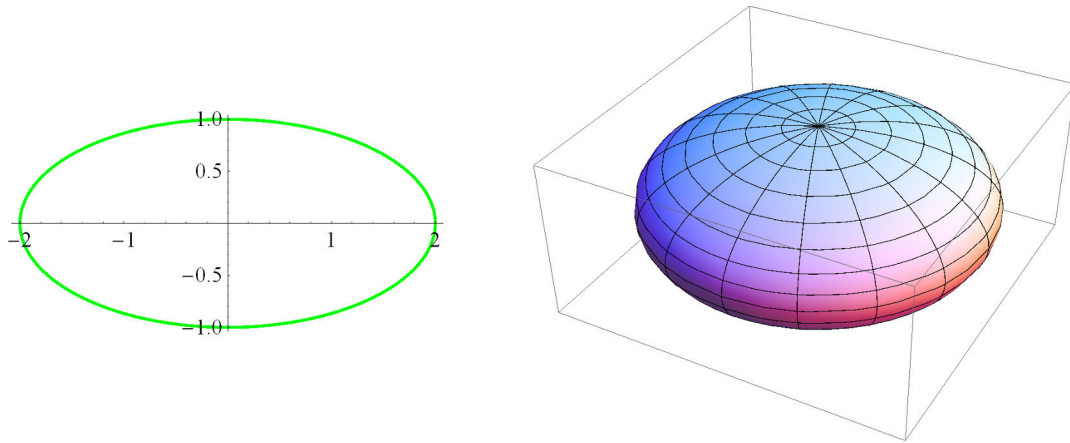


Figura 12.25: Ellisse di equazione (12.13) ed ellissoide di rotazione di equazione (12.14)

Soluzione È sufficiente sostituire al posto di z^2 nell'equazione (12.11) l'espressione $y^2 + z^2$ e si ottiene:

$$\mathcal{S} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \quad (12.15)$$

che rappresenta una superficie detta *iperboloide di rotazione a due falde* che si può vedere nella Figura 12.26 e che sarà studiata dettagliatamente nel Paragrafo 12.6.

Esercizio 12.16 Scrivere l'equazione della superficie \mathcal{S} ottenuta dalla rotazione completa della parabola del piano xz di equazione:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \quad (12.16)$$

intorno all'asse z .

Soluzione È sufficiente sostituire al posto di x^2 l'espressione $x^2 + y^2$ e si ottiene:

$$\mathcal{S} : \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z \quad (12.17)$$

che rappresenta una superficie detta *paraboloide di rotazione*. Nella Figura 12.27 si vedono una parabola di equazione (12.16) e un paraboloide di rotazione di equazione (12.17).

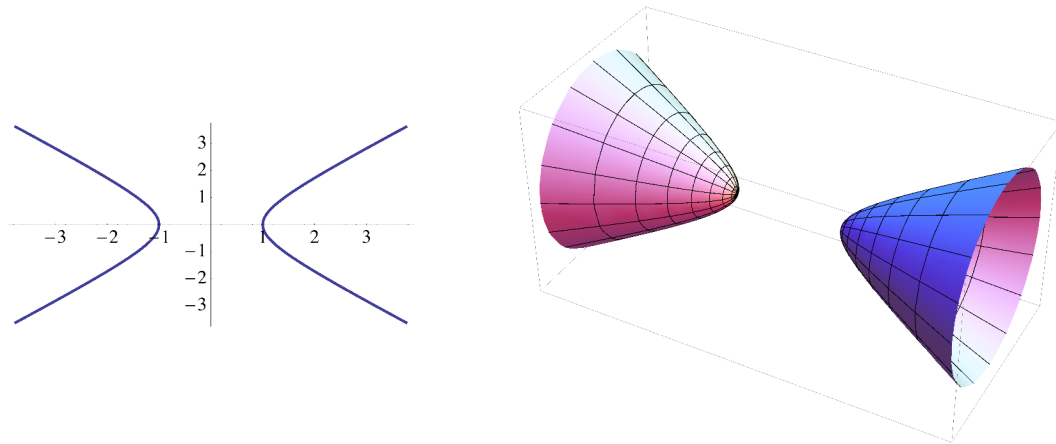


Figura 12.26: Iperbole di equazione (12.11) e iperboloide a due falde di equazione (12.15)

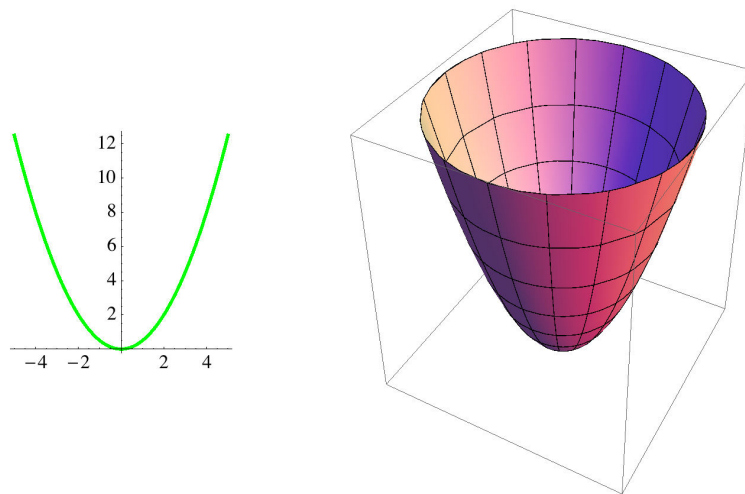


Figura 12.27: Parabola di equazione (12.16) e paraboloidi di equazione (12.17)

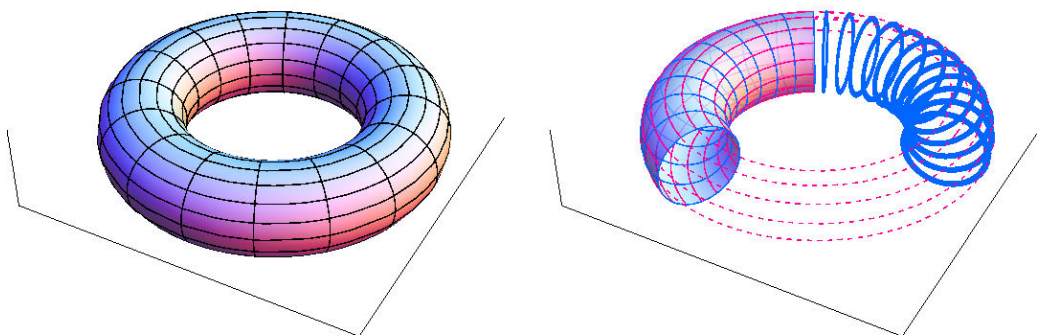


Figura 12.28: Il toro con $a > r$ e una sua sezione

Si affronta ora lo studio delle superfici che si possono ottenere dalla rotazione di una circonferenza intorno ad una retta ad essa complanare, di cui, per esempio, la sfera è un esempio (cfr. Es. 12.9, punto 1.), si inizia con la seguente definizione.

Definizione 12.5 Si dice toro o superficie torica la superficie ottenuta dalla rotazione di una circonferenza C di raggio r intorno ad una retta appartenente al piano della circonferenza e avente distanza a dal centro di C .

- Osservazione 12.4**
1. Se nella definizione precedente si pone $a = r$ si ottiene una sfera.
 2. Se $a > r$ si ottiene la superficie rappresentata nella Figura 12.28 la cui conformazione giustifica la denominazione di superficie torica assegnata a questa superficie.
 3. Se $a < r$ si ottiene la superficie rappresentata nella Figura 12.29.

Per ricavare l'equazione del toro si può procedere come segue. Sia C la circonferenza, di raggio r , appartenente al piano coordinato yz e con centro nel punto $C = (0, a, 0)$, quindi di equazioni:

$$C : \begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0. \end{cases}$$

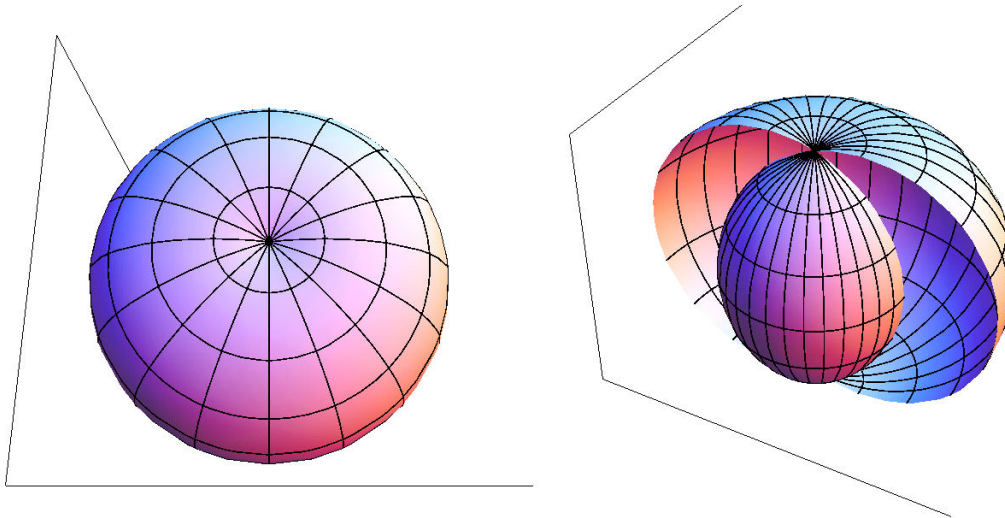


Figura 12.29: Il toro con $a < r$ e una sua sezione

Per ottenere l'equazione della superficie generata dalla rotazione completa di \mathcal{C} intorno all'asse z è sufficiente sostituire a y l'espressione $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e quindi l'equazione del toro è:

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Si può pervenire allo stesso risultato anche seguendo il metodo generale, che consiste nello scrivere le equazioni del generico parallelo della superficie di rotazione che si ottiene intersecando il piano passante per il punto $P_0 = (0, y_0, z_0)$ di \mathcal{C} ortogonale all'asse z con la sfera di centro $C = (0, 0, z_0)$ e raggio $d(C, P_0) = |y_0|$, ossia:

$$\begin{cases} z - z_0 = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = y_0^2, \end{cases}$$

da cui si ricava $y_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Sostituendo nella relazione:

$$\begin{cases} (y_0 - a)^2 + z_0^2 = r^2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

che esprime l'appartenenza di P_0 a \mathcal{C} si ottiene di nuovo l'equazione del toro. Per maggiori dettagli sullo studio delle superfici toriche si veda ad esempio [11].

Si conclude il paragrafo proponendo la risoluzione di un esercizio di determinazione dell'equazione di una generica superficie di rotazione, che non rientra nei casi particolari precedentemente introdotti.

Esercizio 12.17 Determinare l'equazione della superficie generata dalla rotazione della parabola:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

intorno alla retta $a : x = y - z = 0$.

Soluzione È facile osservare che ogni punto P di \mathcal{P} ha coordinate $P = (t, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ e la retta a è parallela al vettore $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$. Si vogliono determinare le equazioni del generico parallelo della superficie di rotazione, appartenente quindi al piano π per P ortogonale ad \mathbf{a} , ossia $\pi : y - t^2 + z = 0$. Il centro C del parallelo \mathcal{C} passante per P è dato dall'intersezione:

$$\begin{cases} y + z - t^2 = 0 \\ x = 0 \\ y = z, \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$C = \left(0, \frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2}\right),$$

allora il raggio di \mathcal{C} è:

$$d(C, P) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}t^4}.$$

Di conseguenza, il parallelo \mathcal{C} ha equazioni:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y + z - t^2 = 0 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}t^2\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}t^2\right)^2 = t^2 + \frac{1}{2}t^4, \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t , si ottiene l'equazione della superficie di rotazione cercata:

$$x^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 - \frac{1}{2}(y + z)^2 - (y + z) = 0.$$

12.5 Cenni su superfici rigate

I piani, i coni, i cilindri gli iperboloidi di rotazione ad una falda sono esempi di particolari superfici formate da un'infinità di rette, che prendono il nome di *superfici rigate*. In questo breve paragrafo si intende introdurre la definizione di superficie rigata, senza però affrontare lo studio delle sue particolari proprietà. Ulteriori esempi significativi saranno descritti nei Paragrafi 12.6.1 e 12.7.

Definizione 12.6 Una superficie S si dice rigata se per ogni punto di S passa almeno una retta interamente contenuta in S . La superficie S si può individuare tramite una curva C che le appartenga, la curva direttrice, associando, mediante un'opportuna legge, per ogni punto P_0 di C almeno una retta di S passante per P_0 . Di conseguenza le equazioni parametriche di S sono del tipo:

$$S : \begin{cases} x = h_1(u) + tl(u) \\ y = h_2(u) + tm(u) \\ z = h_3(u) + tn(u), \end{cases} \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \quad (12.18)$$

dove $(h_1(u), h_2(u), h_3(u))$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}$, sono le equazioni parametriche della curva direttrice C .

- Osservazione 12.5**
1. Il cilindro di equazioni parametriche (12.7) è un esempio di superficie rigata, in cui le rette che lo definiscono sono parallele al vettore di componenti (l, m, n) .
 2. Il cono di equazioni parametriche (12.3) è un esempio di superficie rigata in cui la direttrice si riduce ad un punto che è il vertice del cono.
 3. Si riconosce che le equazioni parametriche (12.18) definiscono una superficie rigata in quanto uno dei due parametri, in questo caso t , compare a primo grado in ciascuna delle tre equazioni parametriche. Se P_0 è il punto di C che si ottiene ponendo $u = u_0$ allora la retta appartenente a S e passante per P_0 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = h_1(u_0) + tl(u_0) \\ y = h_2(u_0) + tm(u_0) \\ z = h_3(u_0) + tn(u_0), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Si osservi che il vettore $(l(u), m(u), n(u))$ in (12.18), identificato con il punto dello spazio di coordinate $(l(u), m(u), n(u))$, descrive a sua volta, al variare di $u \in I$, una curva nello spazio.

Esercizio 12.18 Si consideri la superficie \mathcal{S} di equazione:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = 1 + uv \\ y = u^2v + u \\ z = (u^2 + 1)v, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.19)$$

1. Stabilire se \mathcal{S} è una superficie rigata.
2. Decidere se esistono rette appartenenti a \mathcal{S} parallele al piano π di equazione:

$$y - 2x = 0.$$

3. Posto $v = 1$, scrivere la proiezione ortogonale della curva \mathcal{C} di \mathcal{S} sul piano coordinato xy e riconoscere che \mathcal{C} è una conica.

Soluzione 1. Se nell'equazione (12.19) si considera u costante, allora il parametro v compare solo a primo grado, quindi \mathcal{S} è una superficie rigata e si può anche definire come il luogo delle rette per $P = (1, u, 0)$, parallele al vettore $(u, u^2, u^2 + 1)$. La superficie \mathcal{S} è rappresentata nella Figura 12.30.

2. Determinare le rette appartenenti alla superficie \mathcal{S} e parallele al piano π equivale a trovare u in modo che i vettori $(u, u^2, u^2 + 1)$ e $(-2, 1, 0)$ siano perpendicolari. Si ha che $-2u + u^2 = 0$, da cui $u = 0$ e $u = 2$. Di conseguenza, si ottengono le due rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 5\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Posto $v = 1$ si ricava la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 1 + u \\ y = u^2 + u \\ z = u^2 + 1, \end{cases}$$

della quale si cerca la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$. Eliminando u tra le equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = u^2 + u \end{cases}$$

si ottiene la parabola di equazione $y = (x - 1)^2 + x - 1$.

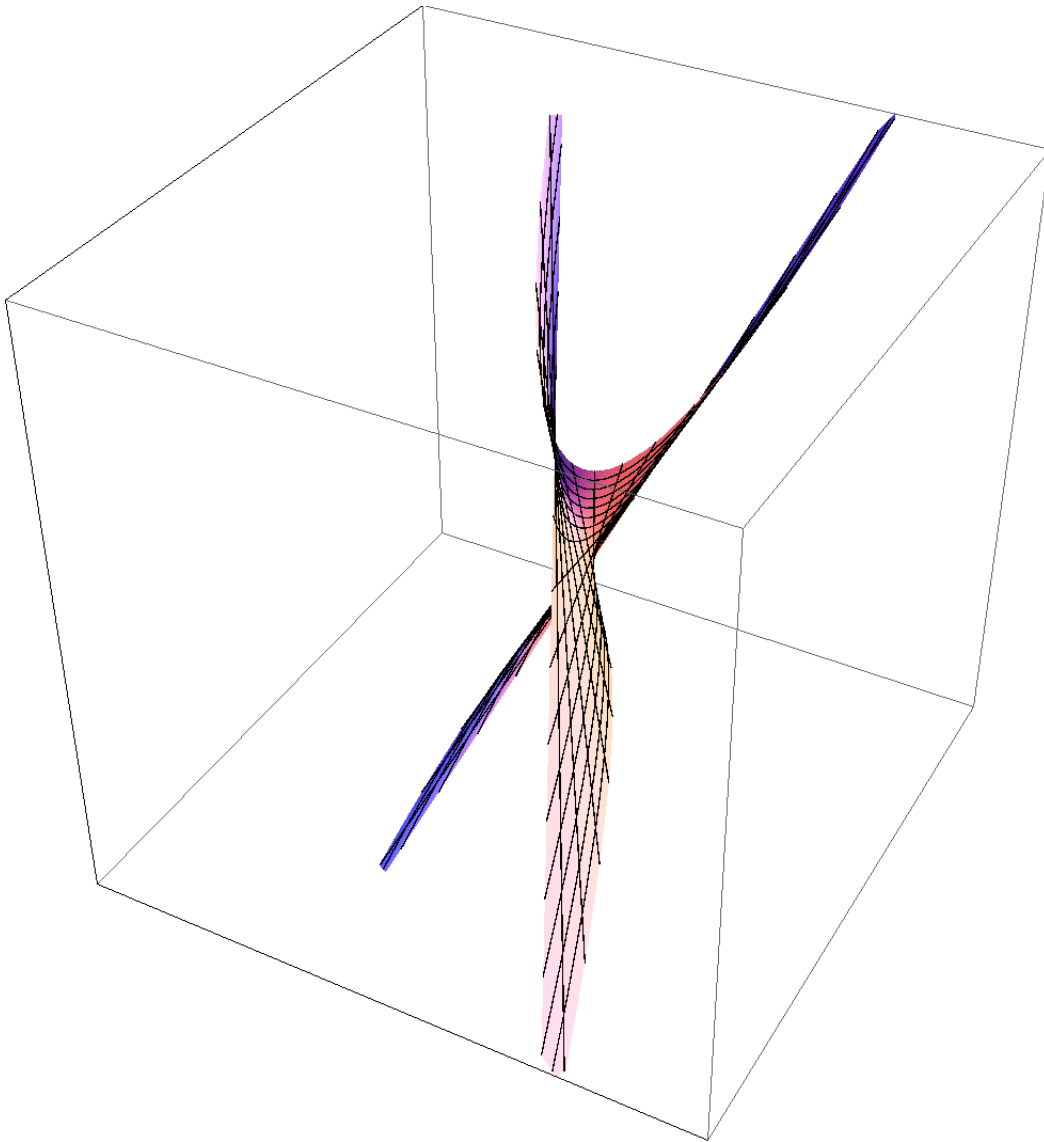


Figura 12.30: Esercizio 12.18

12.6 Quadriche

In questo paragrafo vengono studiate le superfici che estendono al caso dello spazio il concetto di conica introdotto nel piano, infatti esse si possono rappresentare mediante un'equazione di secondo grado nelle variabili x, y, z e prendono il nome di *quadriche*. In modo analogo al caso delle coniche (cfr. Par. 10.4) si dimostrerà un teorema di classificazione che permetterà di scrivere l'equazione di una quadrica in forma canonica, rispetto ad un opportuno sistema di riferimento. Infine ogni tipo di quadrica verrà studiato nei dettagli e se ne ricaveranno anche le equazioni parametriche.

Definizione 12.7 *Fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ nello spazio, una superficie \mathcal{Q} rappresentata da un'equazione di secondo grado in x, y, z del tipo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \quad (12.20)$$

prende il nome di quadrica.

L'equazione (12.20) può essere anche scritta nella forma:

$$\mathcal{Q} : (x \ y \ z \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove B è la matrice simmetrica di ordine 4 data da:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

e che spesso viene anche indicata come la *matrice associata alla quadrica \mathcal{Q}* .

Se ci si limita a considerare il gruppo di termini di secondo grado dell'equazione (12.20), si può introdurre la *forma quadratica* $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ associata a \mathcal{Q} , ponendo:

$$Q((x, y, z)) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dove A è la matrice simmetrica di ordine 3 data da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sovente, le due matrici simmetriche $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ e $B \in \mathbb{R}^{4,4}$ vengono indicate come le *matrici associate alla quadrica \mathcal{Q}* di equazione (12.20), anche se A è in realtà la matrice associata alla forma quadratica definita da \mathcal{Q} .

Esempio 12.13 Il paraboloido di rotazione, ottenuto nell'Esercizio 12.16, di equazione (12.16) è associato alle matrici:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.14 Il cilindro di equazione:

$$x^2 - z^2 = 2$$

è associato alle matrici:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il teorema che segue indica un metodo per scrivere in forma più semplice le equazioni delle quadriche e si basa sulla teoria della riduzione a forma canonica di una forma quadratica introdotta nel Capitolo 8. È perciò necessario anteporre la definizione di *equazione di una quadrica in forma canonica*. Si osservi che il procedimento che sarà descritto è analogo a quello usato, nel caso della geometria analitica piana, per ridurre le equazioni delle coniche a forma canonica, di conseguenza, lo stesso tipo di procedimento può essere esteso allo studio di superfici scritte mediante equazioni di secondo grado in spazi affini

associati a spazi vettoriali euclidei di dimensione maggiore di 3. Per questo motivo si propone una dimostrazione del Teorema 12.3 molto sintetica, senza troppi dettagli, che sono analoghi a quelli della dimostrazione del Teorema 10.6 e pertanto sono lasciati al Lettore per esercizio.

Definizione 12.8 Una quadrica si dice scritta in forma canonica se la sua equazione è del tipo:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0, \quad (12.21)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, oppure del tipo:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\delta z = 0, \quad (12.22)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Teorema 12.3 Sia \mathcal{Q} una quadrica di equazione (12.20) scritta in un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$. È possibile determinare un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R}'' = (O', X, Y, Z)$ in cui \mathcal{Q} si rappresenta in forma canonica o del tipo (12.21) oppure del tipo (12.22) dove α, β e γ sono gli autovalori della matrice A associata all'equazione di \mathcal{Q} .

Dimostrazione L'equazione (12.20) della quadrica \mathcal{Q} si può anche scrivere come:

$$\mathcal{Q} : Q((x, y, z)) + L(x, y, z) = 0,$$

dove Q è la forma quadratica associata a \mathcal{Q} e L rappresenta il polinomio in x, y, z di grado minore o uguale a 1 dato da:

$$L(x, y, z) = 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}.$$

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base ortonormale positiva determinata dal riferimento cartesiano \mathcal{R} . Dalla teoria della riduzione a forma canonica delle forme quadratiche si deduce che esiste un cambiamento di base ortonormale con matrice ortogonale P (scelto in modo tale che $\det(P) = 1$) per cui ${}^tPAP = D$, dove D è una matrice diagonale avente gli autovalori di A sulla diagonale principale. Mediante il cambiamento di coordinate indotto da P dato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (12.23)$$

la forma quadratica assume, nel nuovo riferimento $\mathcal{R}' = (O, x', y', z')$, la seguente espressione in forma canonica:

$$Q((x', y', z')) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \alpha(x')^2 + \beta(y')^2 + \gamma(z')^2,$$

dove α, β, γ indicano gli autovalori della matrice A , eventualmente uguali tra di loro ma non tutti nulli, essendo la matrice A non nulla. Nel riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O, x', y', z')$ l'equazione (12.20) di Q diventa:

$$Q : \alpha(x')^2 + \beta(y')^2 + \gamma(z')^2 + L'(x', y', z') = 0,$$

dove $L'(x', y', z')$ è il polinomio, in x', y', z' , di grado minore o uguale a 1, ottenuto da $L(x, y, z)$ dopo aver sostituito a x, y, z le equazioni (12.23).

La matrice P ha, quindi, determinato una rotazione degli assi cartesiani x, y, z negli assi cartesiani x', y', z' passanti per l'origine e paralleli agli autovettori della matrice A le cui componenti sono le colonne di P .

Se $\alpha \neq 0$, si può annullare il coefficiente del termine di primo grado in x operando con una traslazione lungo l'asse x' (per esempio, con il metodo del completamento dei quadrati). Si ripete la stessa operazione se $\beta \neq 0$ e se $\gamma \neq 0$. Il riferimento cartesiano finale $\mathcal{R}'' = (O', X, Y, Z)$ così ottenuto risulta essere, quindi, la composizione di una rotazione e di una traslazione.

Si presentano i seguenti casi:

1. tre autovalori della matrice A , (contati con le loro molteplicità) non sono nulli, allora l'equazione di Q diventa di tipo (12.21);
2. solamente due autovalori della matrice A , (contati con le loro molteplicità) non sono nulli (per esempio α e β) e la variabile (relativa a $\gamma = 0$), per esempio z , compare a primo grado. Allora con una traslazione di assi si annulla il termine noto e l'equazione di Q è di tipo (12.22);
3. solamente un autovalore di A non è nullo, ossia l'equazione di Q è di tipo:

$$\alpha(x')^2 + ay' + bz' + c = 0.$$

Con una rotazione nel piano coordinato $y'z'$ intorno all'asse x' e con una eventuale traslazione, l'equazione si riduce a $\alpha x'^2 - \delta z' = 0$ che è ancora del tipo (12.22).

Si osservi che $\det(A) = \det(D)$, ma è un esercizio dimostrare che anche la matrice associata a \mathcal{Q} nei due riferimenti cartesiani man mano ottenuti ha determinante che coincide con $\det(B)$. ■

Definizione 12.9 *Le quadriche per cui tutti i coefficienti delle equazioni (12.21) e (12.22) sono diversi da zero si dicono proprie o non degeneri o non singolari. In caso contrario le quadriche si dicono non proprie o degeneri o singolari.*

Osservazione 12.6 Nel caso di quadriche proprie, il determinante della matrice B associata alla quadrica è non nullo, $\det(B) \neq 0$.

Sia \mathcal{Q} una quadrica propria che si rappresenta con un'equazione di tipo (12.21) allora \mathcal{Q} è una delle seguenti superfici:

1. **ellissoide** di equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (12.24)$$

rappresentato nella Figura 12.31. Si osservi che l'ellissoide di rotazione di equazione (12.14) è un caso particolare di questa superficie, in cui un autovalore della matrice A associata alla forma quadratica che definisce la superficie ha molteplicità 2. Se, invece, la matrice A ha un solo autovalore (positivo) di molteplicità 3 allora si ottiene la sfera di centro l'origine e di raggio pari alla radice quadrata dell'autovalore di A .

La superficie è simmetrica rispetto ai piani coordinati, agli assi coordinati e all'origine. L'ellissoide (12.24) interseca l'asse x nei punti $A = (a, 0, 0)$, $A' = (-a, 0, 0)$, l'asse y nei punti $B = (0, b, 0)$, $B' = (0, -b, 0)$ e l'asse z nei punti $C = (0, 0, c)$, $C' = (0, 0, -c)$. Questi sei punti prendono il nome di *vertici* dell'ellissoide.

Poichè le coordinate x, y, z dei punti dell'ellissoide sono tali da verificare le limitazioni:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c,$$

la superficie è interamente contenuta dal parallelepipedo rettangolo le cui facce sono determinate dai piani $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ che sono anche i piani tangenti all'ellissoide nei suoi vertici. Le intersezioni dell'ellissoide con i piani $x = h$, $a < h < a$, con $y = k$, $-b < k < b$, e con $z = l$, $-c < l < c$, sono tutte ellissi, si lascia per esercizio lo studio della variazione dei loro diametri in relazione alle equazioni dei piani a cui appartengono.

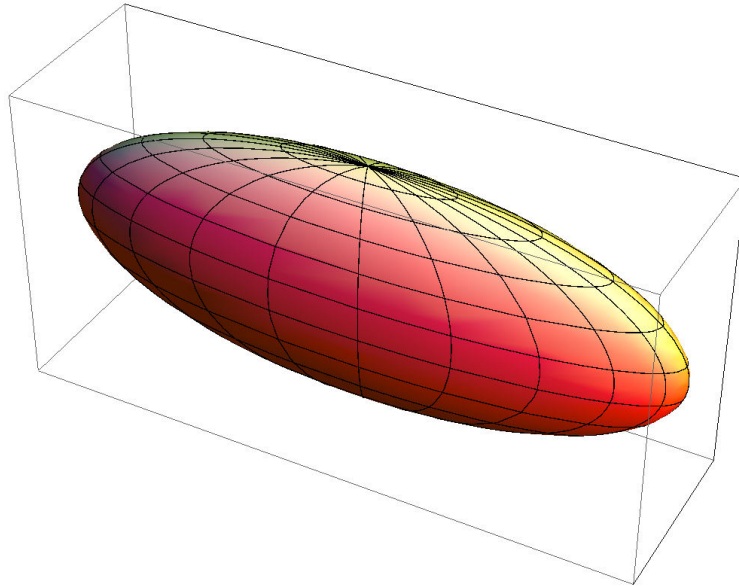


Figura 12.31: Ellissoide

Si verifica facilmente che le equazioni parametriche dell'ellissoide sono:

$$\begin{cases} x = a \cos v \cos u \\ y = b \cos v \sin u \\ z = c \sin v, \end{cases} \quad 0 \leq u, v < 2\pi.$$

2. **ellissoide immaginario** di equazione in forma canonica:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

È evidente che se $a = b = c$ si ottiene la sfera immaginaria.

3. **iperboloide ad una falda** o **iperboloide iperbolico** di equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si tratta della superficie rappresentata all'esterno nella Figura 12.32.

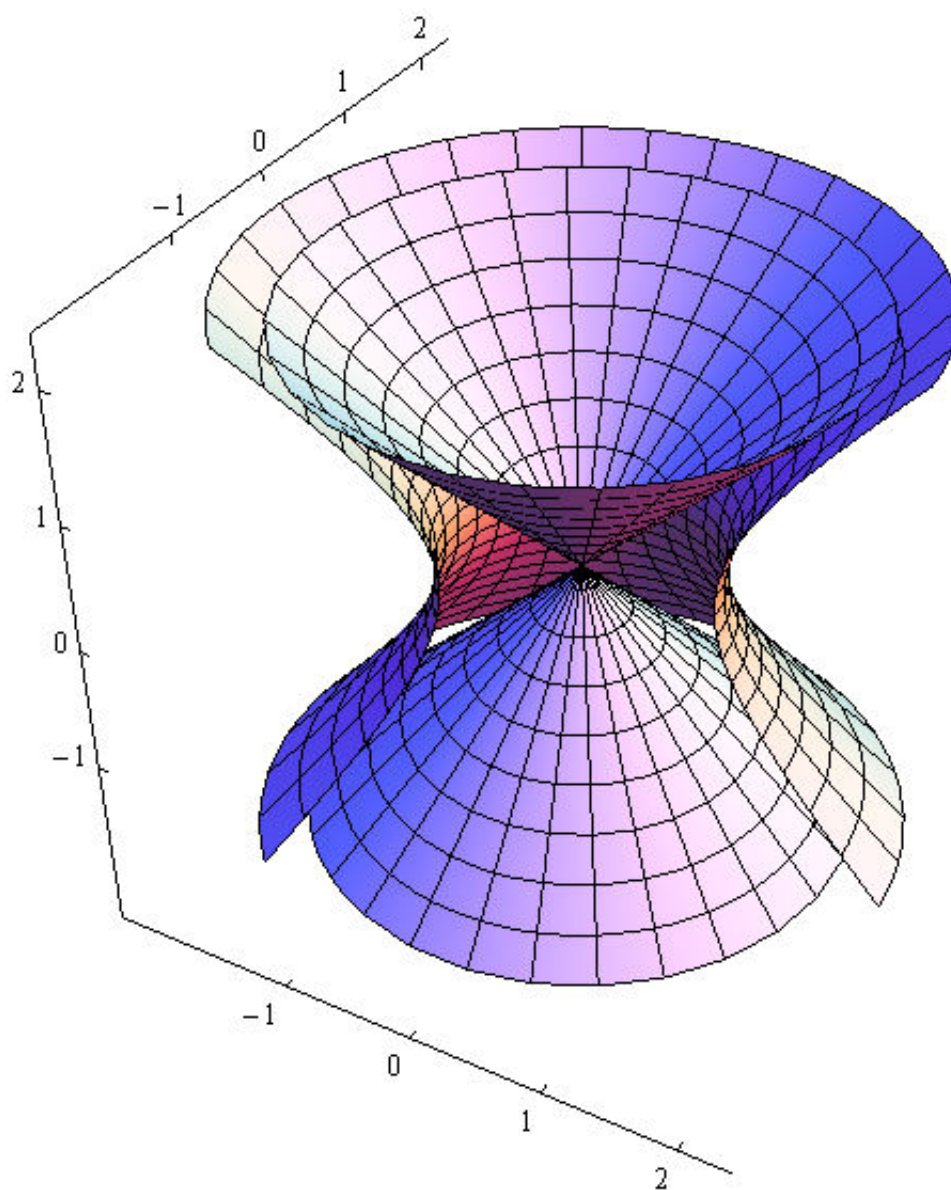


Figura 12.32: Iperboloide ad una falda e il suo cono asintotico

Si osservi che l'iperboloide di rotazione ad una falda introdotto nell'Esempio 12.12 è un caso particolare di questa superficie in cui $a = b$. La stessa superficie di rotazione si è anche ottenuta, in modo diverso, nell'equazione (12.11). Si lascia per esercizio, invece, lo studio della superficie in cui $a = b = c$.

L'iperboloide ad una falda è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati, agli assi coordinati e all'origine del sistema di riferimento. Due assi soltanto intersecano la superficie e precisamente l'asse x nei punti $A = (a, 0, 0)$, $A' = (-a, 0, 0)$ e l'asse y nei punti $B = (0, b, 0)$, $B' = (0, -b, 0)$, pertanto la superficie ha solo quattro vertici. Nel Paragrafo 12.6.1 si dimostrerà che l'iperboloide ad una falda non solo è una superficie rigata ma è doppiamente rigata, ossia per ogni suo punto passano due rette ad essa appartenenti.

Le intersezioni dell'iperboloide ad una falda con i piani $x = h$, $h \in \mathbb{R}$, sono ellissi (delle quali la più piccola ha centro nell'origine e viene detta *linea di gola o linea di strizione*), mentre le sue intersezioni con i piani $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, e $z = l$, $l \in \mathbb{R}$, sono iperboli. Si lascia per esercizio la determinazione delle equazioni delle coniche così ottenute e il confronto tra le lunghezze dei diametri delle ellissi e delle iperboli in relazione alle equazioni dei piani a cui esse appartengono. I piani passanti per l'asse z intersecano l'iperboloide ad una falda in iperboli i cui asintoti individuano un cono con vertice nell'origine, detto *cono asintotico*, che è di conseguenza posizionato all'interno della superficie ed ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Nella Figura 12.32 sono rappresentati sia un iperboloide ad una falda sia il suo cono asintotico.

Si verifica facilmente le equazioni parametriche dell'iperboloide ad una falda sono:

$$\begin{cases} x = a \cosh v \cos u \\ y = b \cosh v \sin u \\ z = c \sinh v, \quad 0 \leq u < 2\pi, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. **iperboloide a due falde** di equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si tratta della superficie rappresentata all'interno del cono nella Figura 12.33. Si osservi che l'iperboloide di rotazione a due falde di equazione (12.15) è un caso particolare di questa superficie in cui $b = c$.

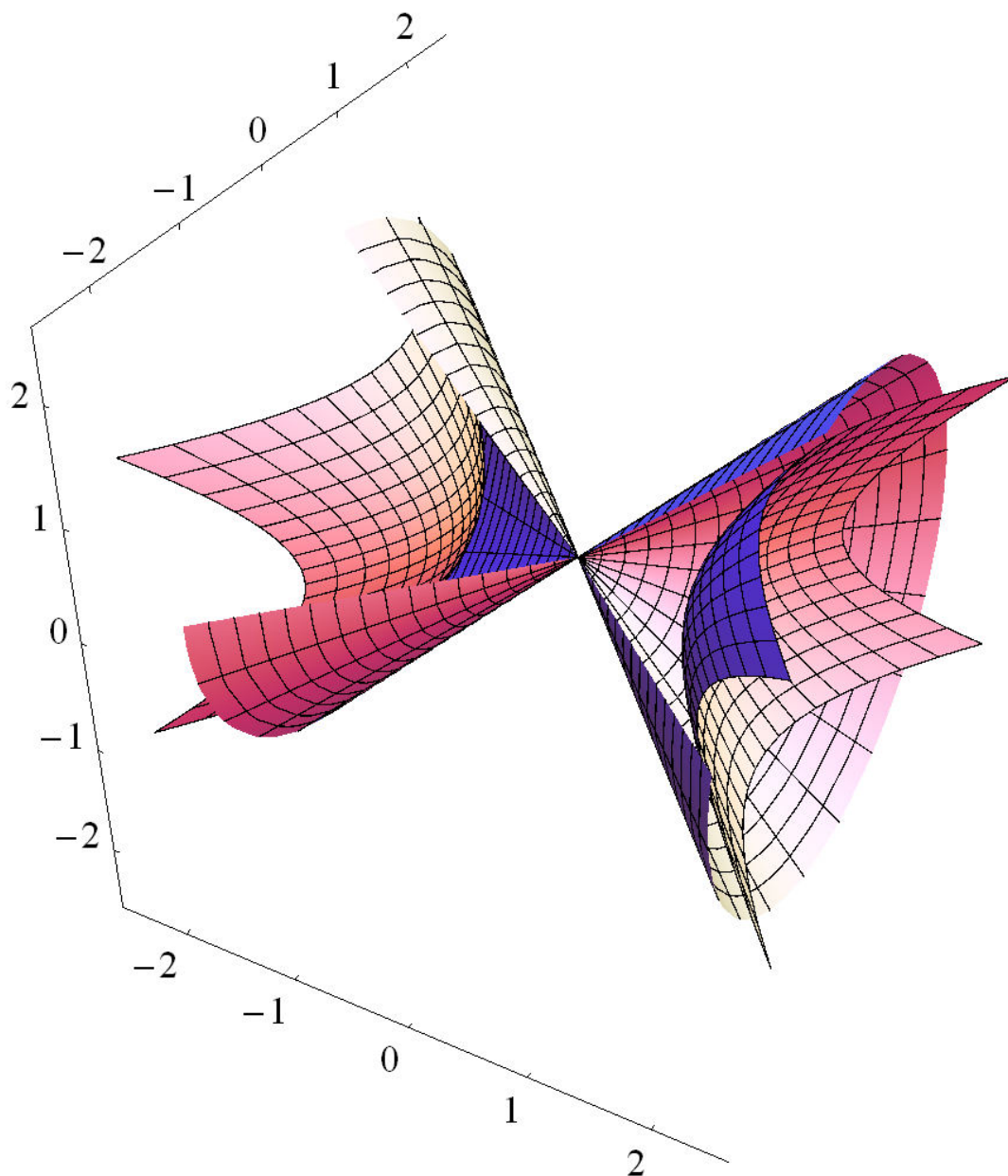


Figura 12.33: Iperboloide a due falde e il suo cono asintotico

Anche l'iperboloide a due falde è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati, agli assi coordinati e all'origine, un solo asse lo interseca, precisamente l'asse x nei punti $A = (a, 0, 0)$, $A' = (-a, 0, 0)$ pertanto la superficie ha solo due vertici. Le sue sezioni: con i piani $x = h$, dove $h > a$ e $h < -a$, sono ellissi; con i piani $y = k$ e $z = l$ sono iperboli, mentre i piani passanti per l'asse x intersecano l'iperboloide a due falde in iperboli i cui asintoti costituiscono un cono, detto anche in questo caso *cono asintotico*, che racchiude la superficie al suo interno ed ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Si verifica facilmente che le equazioni parametriche dell'iperboloide a due falde sono:

$$\begin{cases} x = a \cosh u \cosh v \\ y = b \sinh u \cosh v \\ z = c \sinh v, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se \mathcal{Q} è una quadrica propria e si rappresenta con un'equazione di tipo (12.22) \mathcal{Q} è una delle seguenti superfici.

5. **paraboloide ellittico** di equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

rappresentato nella Figura 12.34. Si osservi che il paraboloide di rotazione di equazione (12.16) è un esempio di paraboloide ellittico, in cui la matrice A ad esso associata ha un autovalore di molteplicità 2. Il paraboloide ellittico è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati di equazioni $x = 0$, $y = 0$ e all'asse z , è contenuta nel semispazio della semiretta positiva dell'asse z ed ha perciò un solo vertice nell'origine. Le curve intersezione della superficie con i piani di equazione $x = h$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, sono ellissi, si lascia per esercizio la determinazione dei vertici e dei diametri di queste ellissi in relazione al piano a cui esse appartengono, invece il piano $x = 0$ è tangente alla superficie nell'origine. Le curve intersezione del paraboloide ellittico con i piani di equazione $y = k$ e $z = l$, $k, l \in \mathbb{R}$ sono parabole.

Si verifica facilmente che le equazioni parametriche del paraboloide ellittico sono:

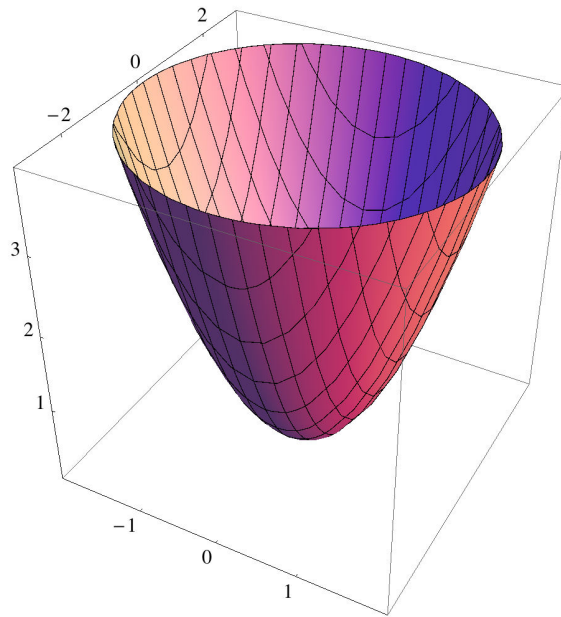


Figura 12.34: Paraboloide Ellittico

$$\begin{cases} x = a u \\ y = b v \\ z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. **paraboloide iperbolico o a sella** di equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

rappresentato nella Figura 12.35. Si nota subito che questa superficie non può essere una superficie di rotazione, perché? La superficie è simmetrica rispetto ai piani coordinati yz e xz , è anche simmetrica rispetto all'asse x . Se si interseca la superficie con il piano coordinato xy di equazione $z = 0$ si ottiene la conica degenera di equazione:

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$$

formata da una coppia di rette incidenti, che quindi appartengono al paraboloide iperbolico. Nel Paragrafo 12.6.1 si dimostrerà che effettivamente il paraboloide

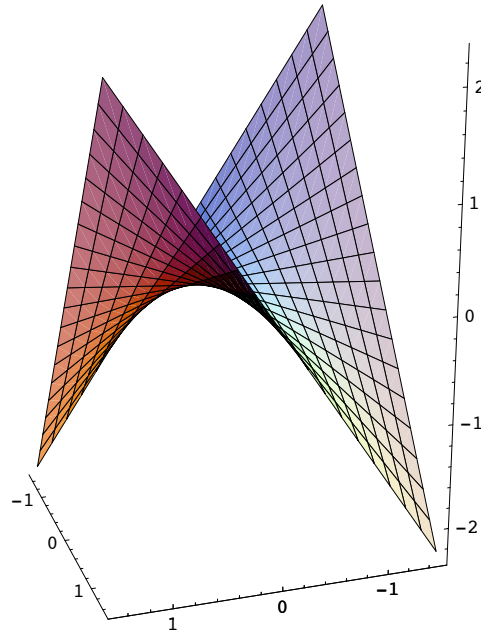


Figura 12.35: Paraboloide iperbolico o a sella

de iperbolico è un esempio di superficie rigata e, come l'iperboloide iperbolico, è doppiamente rigata.

L'intersezione del paraboloide iperbolico con il piano coordinato yz è la parabola di equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2a^2z, \end{cases} \quad (12.25)$$

mentre l'intersezione del paraboloide iperbolico con il piano coordinato xz è la parabola di equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -2b^2z. \end{cases} \quad (12.26)$$

Se si interseca, invece, il paraboloide iperbolico con i piani di equazione $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, si ottengono le parabole di equazioni:

$$\begin{cases} x = k \\ y^2 = -2b^2 \left(z - \frac{k^2}{2a^2} \right). \end{cases} \quad (12.27)$$

Operando mediante la traslazione degli assi cartesiani di equazioni:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \\ z - \frac{k^2}{2a^2} = Z \end{cases}$$

si ottiene che, nel riferimento $\mathcal{R}' = (O, X, Y, Z)$, la parabola (12.27) ha equazioni:

$$\begin{cases} X = k \\ Y^2 = -2b^2Z, \end{cases}$$

quindi essa coincide con la parabola di equazioni (12.26) ma con il vertice nel punto

$$V = \left(k, 0, \frac{k^2}{2a^2} \right),$$

scritto nel riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$. Situazione analoga si verifica intersecando il paraboloido iperbolico con i piani di equazione $y = h, h \in \mathbb{R}, h \neq 0$, ottenendo parabole tutte uguali a quella di equazioni (12.25). Se si interseca, invece, il paraboloido iperbolico con i piani di equazione $z = l, l \in \mathbb{R}, l \neq 0$ si ottengono delle iperboli. Si lascia per esercizio la determinazione dei loro vertici e la verifica che essi appartengono (nel caso di $l > 0$) alla parabola di equazioni (12.25). Che cosa succede nel caso $l < 0$? Gli asintoti di tali iperboli originano un cono degenere di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

che in realtà consiste in due piani incidenti.

Le equazioni parametriche del paraboloido iperbolico sono:

$$\begin{cases} x = a u \\ y = b v \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se la quadrica \mathcal{Q} è degenere, cioè se uno dei coefficienti della sua equazione in forma canonica si annulla, allora essa è una delle seguenti superfici:

1. **cono quadrico** di equazione in forma canonica:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$$

con $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. In questo caso la quadrica è un cono oppure si riduce ad un punto se α, β, γ hanno lo stesso segno. Si usa il termine “quadrico” solo per indicare che questo cono si rappresenta mediante un’equazione di secondo grado nelle variabili x, y, z .

2. **Cilindro quadrico** le cui equazioni, in forma canonica, possono essere dei tre tipi seguenti:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ossia il **cilindro ellittico**;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ossia il **cilindro iperbolico**;

$$x^2 = 2py,$$

ossia il **cilindro parabolico**;

Le denominazioni dei tre tipi di cilindri quadrici dipendono dal fatto che ogni piano, non parallelo ad una generatrice, interseca il cilindro rispettivamente secondo un’ellisse, un’iperbole, una parabola.

3. Unione di due piani incidenti, paralleli o coincidenti, anche immaginari, con equazioni, in forma canonica del tipo:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0,$$

$$x^2 = a^2, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$x^2 = 0.$$

Riassumendo, si può ottenere la *classificazione delle quadriche attraverso il rango* delle matrici A e B ad esse associate nel modo seguente, tenuto conto che il rango di A ed il rango di B sono invarianti per rototraslazioni nello spazio.

- $\text{rank}(B) = 4 \begin{cases} \text{rank}(A) = 3 : \begin{cases} \text{ellissoide, sfera, iperboloide ad una falda,} \\ \text{iperboloide a due falde;} \end{cases} \\ \text{rank}(A) = 2 : \text{paraboloide ellittico, paraboloide iperbolico.} \end{cases}$
- $\text{rank}(B) = 3 \begin{cases} \text{rank}(A) = 3 : \text{cono;} \\ \text{rank}(A) = 2 : \text{cilindro.} \end{cases}$
- $\text{rank}(B) = 2 \begin{cases} \text{rank}(A) = 2 : \text{due piani incidenti;} \\ \text{rank}(A) = 1 : \text{due piani paralleli.} \end{cases}$
- $\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = 1 : \text{due piani coincidenti.}$

Esercizio 12.19 Ridurre in forma canonica la quadrica \mathcal{Q} di equazione:

$$\mathcal{Q} : 4x^2 + 4xy + 4xz + 4y^2 + 4yz + 4z^2 + 4x + 4y + 8z + 3 = 0.$$

Soluzione Le matrici A e B associate alla quadrica sono:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(B) = -32$, $\det(A) = 32$, la quadrica \mathcal{Q} può essere un ellissoide o un iperboloide ad una o due falde. Gli autovalori di A con le rispettive molteplicità sono:

$$\lambda_1 = 2, \quad m_{\lambda_1} = 2; \quad \lambda_2 = 8, \quad m_{\lambda_2} = 1,$$

quindi \mathcal{Q} è un ellissoide di rotazione. Una base ortonormale di autovettori è:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right).$$

Si definisce quindi la rotazione degli assi cartesiani di equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

e l'equazione della quadrica nel riferimento $\mathcal{R}' = (O, x', y', z')$ è:

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (4 \ 4 \ 8) P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 3 = 0$$

ossia:

$$2(x')^2 + 2(y')^2 + 8(z')^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{6}}y' + \frac{16}{\sqrt{3}}z' + 3 = 0.$$

Operando con il metodo del completamento dei quadrati si ha:

$$2\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(y' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 8\left(z' + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Mediante la traslazione di equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

la quadrica assume, nel riferimento $\mathcal{R}'' = (O', X, Y, Z)$ l'equazione:

$$2X^2 + 2Y^2 + 8Z^2 = 1.$$

Si tratta proprio di un ellissoide di rotazione. La rototraslazione che permette di passare dal riferimento iniziale \mathcal{R} al riferimento \mathcal{R}'' è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

quindi l'origine O' del riferimento \mathcal{R} , che è anche il centro dell'ellissoide, ha coordinate $(0, 0, -1)$ nel riferimento iniziale \mathcal{R} .

12.6.1 Quadriche rigate

Lo scopo di questo paragrafo è quello di dimostrare che due quadriche proprie, precedentemente introdotte, l'iperboloide ad una falda e il paraboloido iperbolico, sono esempi di superfici rigate (cfr. Par. 12.5) essendo interamente costituite da una doppia famiglia di rette. D'altra parte, entrambe queste superfici possono essere ottenute anche come luogo geometrico di punti, come sarà specificato nel Teoremi 12.4 e 12.5.

12.6.2 L'iperboloide ad una falda

L'equazione dell'iperboloide ad una falda:

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

superficie già studiata nel Paragrafo 12.6 e rappresentata nella Figura 12.32, si può anche scrivere come:

$$\mathcal{I} : \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (12.28)$$

Dalla precedente uguaglianza di due prodotti si ricavano, per esempio, le espressioni:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\
 & \\
 2. \quad & \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R},
 \end{aligned}
 \tag{12.29}$$

ciascuna delle quali conduce alle due famiglie di rette seguenti:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ 1 - \frac{y}{b} = \lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right), \end{cases} \\
 & \\
 2. \quad & \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda_2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ 1 + \frac{y}{b} = \lambda_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right), \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{12.30}$$

che, al variare di $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ appartengono all'iperboloide \mathcal{I} . Si osservi che, a partire da (12.28), ogni altra combinazione dell'uguaglianza darebbe luogo alle stesse equazioni ottenute in (12.29). Per ogni punto $P_0 \in \mathcal{I}$ si individuano due parametri λ_1 e λ_2 , di conseguenza si determinano due rette passanti per P_0 , una per ogni famiglia di rette in (12.30) ma entrambe appartenenti a \mathcal{I} , pertanto anche \mathcal{I} è una superficie doppiamente rigata. Le due famiglie di rette di equazioni (12.30) prendono il nome di *schiere di rette* appartenenti all'iperboloide \mathcal{I} .

Si vuole, ora, studiare la posizione reciproca di due rette r_1 e r'_1 appartenenti alla stessa schiera, per esempio alla schiera 1. in (12.30), corrispondenti ai parametri λ_1 e λ'_1 ; siano:

$$\begin{aligned}
 r_1 : \quad & \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ 1 - \frac{y}{b} = \lambda_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right), \end{cases} \\
 & \\
 r'_1 : \quad & \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda'_1 \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ 1 - \frac{y}{b} = \lambda'_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right). \end{cases}
 \end{aligned}$$

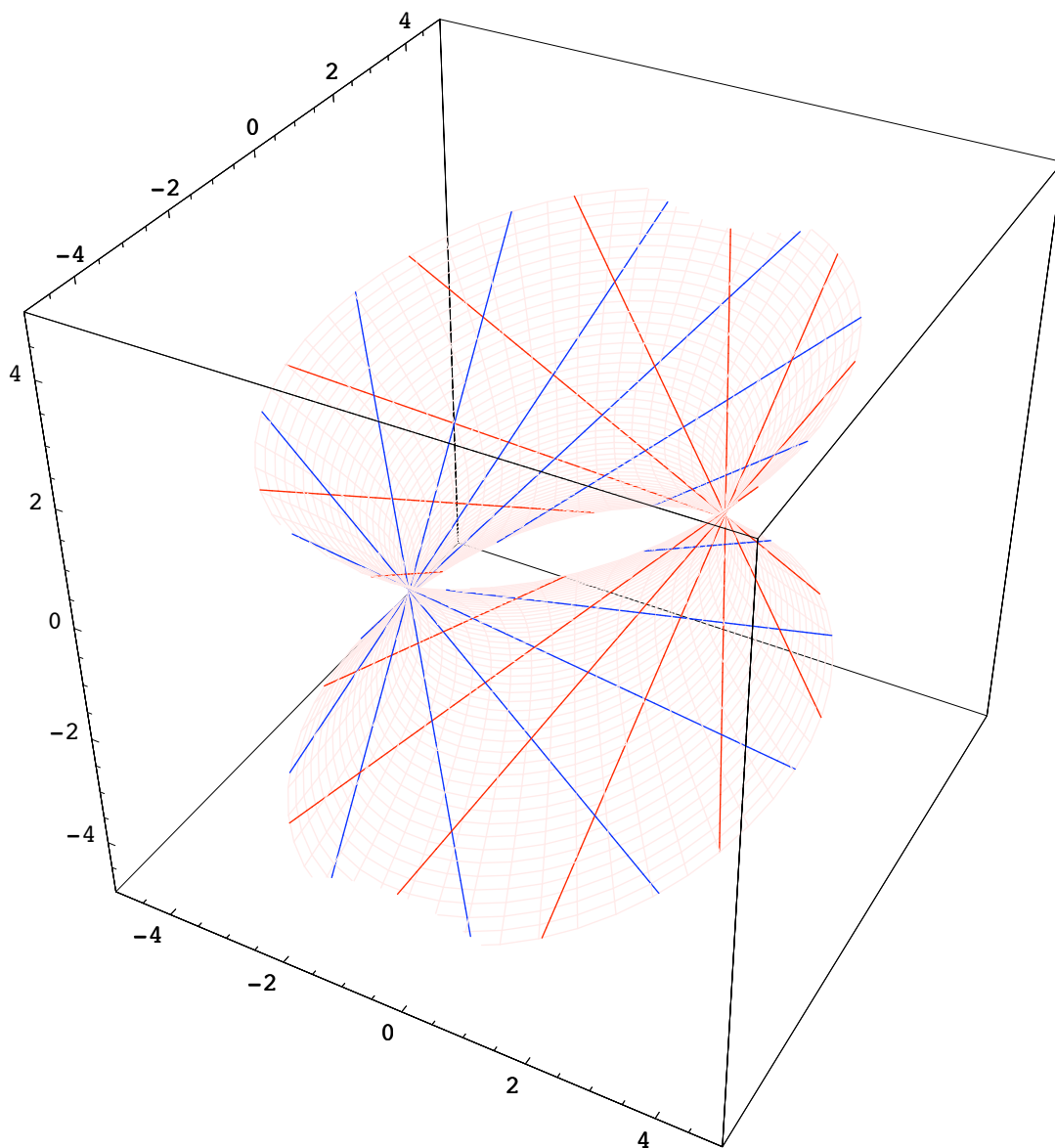


Figura 12.36: Iperboloide ad una falda con le due schiere di rette

Esse non sono incidenti perché ogni punto P_0 di \mathcal{I} determina un solo valore di λ_1 , quindi una sola retta della schiera considerata. Le rette r_1 e r'_1 non sono parallele infatti r_1 è parallela al vettore:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{a} & -\frac{\lambda_1}{b} & -\frac{1}{c} \\ \frac{\lambda_1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{\lambda_1}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{-\lambda_1^2 + 1}{bc}, -\frac{2\lambda_1}{ac}, \frac{1 + \lambda_1^2}{ab} \right),$$

mentre r'_1 è parallela al vettore:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{a} & -\frac{\lambda'_1}{b} & -\frac{1}{c} \\ \frac{\lambda'_1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{\lambda'_1}{c} \end{vmatrix} = \left(\frac{-\lambda_1'^2 + 1}{bc}, -\frac{2\lambda'_1}{ac}, \frac{1 + \lambda_1'^2}{ab} \right),$$

di conseguenza le rette r_1 e r'_1 sono sghembe. Concludendo, le rette appartenenti alla stessa schiera di rette sull'iperboloide iperbolico sono tra loro sghembe, mentre per ogni punto dell'iperboloide iperbolico passano due rette, una di una schiera e l'altra dell'altra schiera, interamente contenute sull'iperboloide iperbolico stesso. La situazione geometrica è molto ben illustrata nella Figura 12.26 realizzata con il programma di calcolo simbolico *Mathematica* dal Prof. S. Berardi del Dipartimento di Informatica dell'Università di Torino.

Esercizio 12.20 Dato l'iperboloide:

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, \tag{12.31}$$

ricavare le equazioni delle rette r e s che passano per il punto $P = (2, 3, 1) \in \mathcal{I}$ e che giacciono sull'iperboloide. Determinare, inoltre, l'equazione del piano π contenente le rette r e s .

Soluzione Data la retta generica r passante per il punto P :

$$r : \begin{cases} x = 2 + lt \\ y = 3 + mt \\ z = 1 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{12.32}$$

si vogliono determinare i suoi parametri direttori (l, m, n) in modo tale che r appartenga ad \mathcal{I} . Sostituendo le equazioni (12.32) in (12.31) si ha:

$$\frac{(2 + lt)^2}{4} + \frac{(3 + mt)^2}{9} - (1 + nt)^2 = 1,$$

da cui:

$$\left(\frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{9} - n^2\right)t^2 + \left(l + \frac{2}{3}m - 2n\right)t = 0.$$

Si perviene quindi al sistema di secondo grado:

$$\begin{cases} l + \frac{2}{3}m - 2n = 0 \\ \frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{9} - n^2 = 0, \end{cases}$$

le cui due soluzioni sono:

$$\begin{cases} m = 0 \\ l = 2n, \end{cases} \quad \begin{cases} m - 3n = 0 \\ l = 0, \end{cases}$$

in corrispondenza delle quali si ottengono le rette r passante per $P = (2, 3, 1)$, parallela al vettore $\mathbf{r} = (2, 0, 1)$ e s passante per $P = (2, 3, 1)$, parallela al vettore $\mathbf{s} = (0, 3, 1)$.

Si ottiene lo stesso risultato decomponendo l'equazione dell'iperboloide (12.31) nel modo seguente:

$$\left(\frac{x}{2} - z\right)\left(\frac{x}{2} + z\right) = \left(1 - \frac{y}{3}\right)\left(1 + \frac{y}{3}\right)$$

e ricavando le equazioni delle due schiere di rette ad esso appartenenti:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - z = \lambda_1 \left(1 - \frac{y}{3}\right) \\ 1 + \frac{y}{3} = \lambda_1 \left(\frac{x}{2} + z\right), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - z = \lambda_2 \left(1 + \frac{y}{3}\right) \\ 1 - \frac{y}{3} = \lambda_2 \left(\frac{x}{2} + z\right), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo in entrambe le equazioni delle schiere le coordinate del punto P si ricavano i valori di λ_1 e di λ_2 e si perviene così alle equazioni delle rette r e s , una per ciascuna schiera.

Il piano π passante per $P = (2, 3, 1)$ e parallelo ad r e a s ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3x + 2y - 6z - 6 = 0.$$

Il teorema che segue afferma che l'iperboloide ad una falda può anche essere ottenuto come luogo geometrico di punti. Anziché proporre la dimostrazione (che è comunque un esercizio e viene lasciata al Lettore) si preferisce ricavare, nell'Esercizio 12.21, un esempio dello stesso luogo geometrico.

Teorema 12.4 *L'iperboloide ad una falda è il luogo delle rette che si appoggiano contemporaneamente a tre rette che sono sghembe a due a due.*

Esercizio 12.21 Date le rette:

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t' \\ y = 1 \\ z = 0, t' \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad h : \begin{cases} x = -1 \\ y = t'' \\ z = 1, t'' \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

verificare che sono sghembe a due a due e determinare il luogo delle rette che si appoggiano contemporaneamente ad r, s, h .

Soluzione È immediato verificare che le rette date sono a due a due sghembe (è sufficiente notare che non sono parallele e che per esempio le rette s e h non passano per l'origine, a differenza della retta r , e che s e h non sono incidenti).

La retta che unisce il punto generico di s con il punto generico di h ha equazione:

$$\frac{x-t'}{t'+1} = \frac{y-1}{1-t''} = \frac{z}{-1}. \tag{12.33}$$

Se si impone che questa retta passi per il punto generico di r si ottengono le uguaglianze:

$$\frac{t'}{t'+1} = \frac{1}{1-t''} = -t,$$

che stabiliscono la condizione che devono verificare i parametri t, t' e t'' affinché siano allineati tre punti di r, s ed h rispettivamente. Da esse si ottengono le relazioni:

$$t' = \frac{-t}{1-t}, \quad t'' = \frac{1+t}{t}.$$

Sostituendo nell'equazione (12.33), segue:

$$\frac{x + \frac{t}{1+t}}{\frac{t}{1-t} + 1} = \frac{y-1}{1 - \frac{t+1}{t}} = -z,$$

o, con ovvie semplificazioni, l'espressione:

$$x(1+t) + t = -t(y-1) = -z$$

che rappresenta la generica retta del luogo richiesto, al variare del parametro t . La retta precedente si può scrivere come intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} x + z = -t(x+1) \\ t(y-1) = z, \end{cases}$$

dai quali si elimina facilmente il parametro t e si ottiene l'equazione cartesiana del luogo:

$$\mathcal{S} : xy + xz + yz - x = 0.$$

Si tratta, evidentemente, di una quadrica che si può identificare con la riduzione a forma canonica della sua equazione. A tale scopo si considera la matrice A associata alla forma quadratica di \mathcal{S} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori, con le rispettive molteplicità, sono:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_{\lambda_1} = 2; \quad \lambda_2 = 1, \quad m_{\lambda_2} = 1.$$

Gli autospazi corrispondenti sono rispettivamente $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3)$, con:

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1).$$

Utilizzando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt per il primo autospazio e calcolando il versore di \mathbf{u}_3 si ottiene una base ortonormale $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3)$ di autovettori la cui matrice ortogonale P del cambiamento di base da $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a \mathcal{B}' è:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Operando su $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ con il cambiamento di riferimento dato dalla rotazione di equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

si perviene all'equazione della quadrica:

$$-\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 + (z')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z' = 0.$$

Procedendo con il metodo del completamento dei quadrati si ha:

$$-\frac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(z' - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

ed applicando la traslazione di equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

si ha l'equazione della quadrica in forma canonica:

$$2X^2 + 2Y^2 - 4Z^2 = 1.$$

Si tratta, pertanto, di un iperboloide ad una falda.

12.6.3 Il paraboloide iperbolico

L'equazione del paraboloide iperbolico:

$$\mathcal{P} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

superficie già studiata nel Paragrafo 12.6 e rappresentata nella Figura 12.35, può essere decomposta come:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \quad (12.34)$$

L'equazione (12.34), in realtà, equivale alle due equazioni seguenti:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2z}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad (12.35)$$

e:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2z}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (12.36)$$

D'altra parte, (12.35) può essere scritta come:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda_1 \\ 2z = \lambda_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (12.37)$$

e (12.36) come:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda_2 \\ 2z = \lambda_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.38)$$

I due sistemi lineari (12.37) e (12.38) rappresentano due famiglie di rette che, al variare di λ_1 e λ_2 in \mathbb{R} appartengono al paraboloide iperbolico, in quanto ne verificano la sua equazione. Il paraboloide iperbolico, con le due famiglie di rette appena determinate, è rappresentato nella Figura 12.37, tratta da [11].

Come nel caso dell'iperboloide iperbolico, ciascuna di queste famiglie di rette prende il nome di *schiera di rette* del paraboloide iperbolico. Si vuole ora studiare la posizione reciproca delle rette all'interno della stessa schiera. Si consideri, per esempio, la schiera di rette (12.35). Tutte le rette di tale schiera, al variare di λ_1 in \mathbb{R} , appartengono al piano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda_1,$$

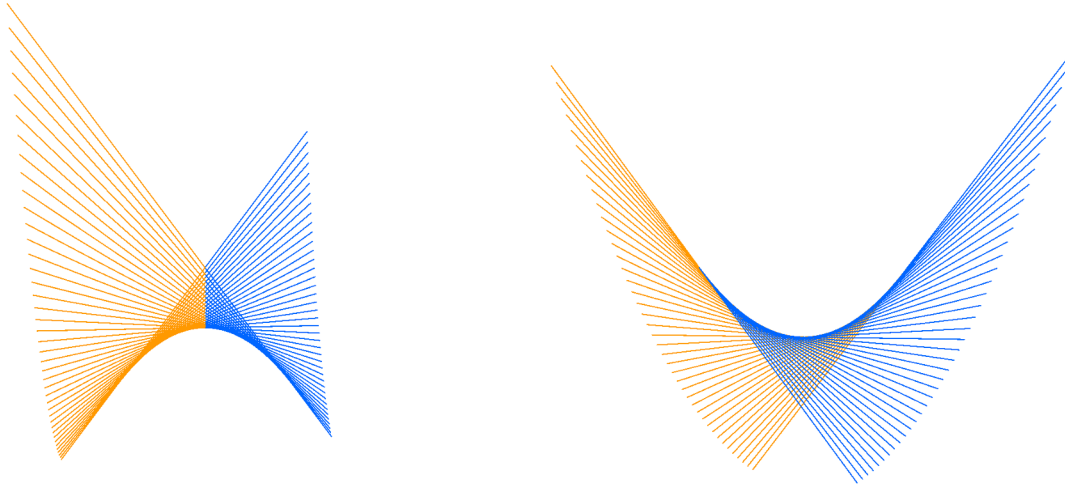


Figura 12.37: Le due schiere di rette sul paraboloido iperbolico

quindi appartengono a piani paralleli ma sono rette sghembe perchè i piani:

$$2z = \lambda_1 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

non sono paralleli. Lo stessa situazione si verifica per le rette appartenenti alla schiera (12.36). Inoltre, coppie di rette di schiere diverse sono complanari, infatti per ogni punto P_0 del paraboloido \mathcal{P} esistono due rette (una appartenente a (12.35) una appartenente a (12.36)) passanti per P_0 e interamente contenute in \mathcal{P} , pertanto \mathcal{P} è una superficie doppiamente rigata.

Esercizio 12.22 Nello spazio sono date le rette sghembe:

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ z = 0. \end{cases}$$

Determinare il luogo dei centri delle sfere tangenti, contemporaneamente, a r e a s .

Soluzione Il centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ della sfera deve verificare la condizione $d(C, r) = d(C, s)$. Sia π_1 il piano per C ortogonale ad r , che ha equazione $z = z_0$, l'intersezione

di π_1 con r è il punto A dato da:

$$A = \left(0, \frac{1}{2}, z_0\right).$$

Sia π_2 il piano per C ortogonale a s , che ha equazione $x = x_0$, l'intersezione di π_2 con s è il punto B dato da:

$$B = \left(x_0, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Allora $d(C, r) = d(C, A)$ e $d(C, s) = d(C, B)$, perciò da $d(C, A) = d(C, B)$ si ottiene:

$$x_0^2 - z_0^2 = 2y_0$$

che è l'equazione cartesiana di un paraboloido iperbolico. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 12.38.

Il teorema che segue afferma che il paraboloido iperbolico può anche essere ottenuto come luogo geometrico di punti. Anziché proporre la dimostrazione (che è comunque un esercizio e viene lasciata al Lettore) si preferisce ricavare un esempio dello stesso luogo geometrico nell'Esercizio 12.23.

Teorema 12.5 *Il paraboloido iperbolico si può ottenere come luogo geometrico delle rette che si appoggiano a due rette sghembe e sono tutte parallele ad un piano.*

Esercizio 12.23 Dati il piano $\pi : x - y = 0$ e le rette:

$$r : \begin{cases} x - y - \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1 = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 1 = 0, \end{cases}$$

verificare che r e s sono sghembe e determinare il luogo delle rette che si appoggiano contemporaneamente ad r e a s e sono parallele al piano π .

Soluzione Si vede facilmente che le rette r e s sono sghembe perché giacciono su piani paralleli e sono ottenute dall'intersezione con altri due piani tra di loro non paralleli. Le equazioni parametriche di r e di s sono:

$$r : \begin{cases} x = \frac{1 + 2t}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1 - 2t}{2\sqrt{2}} \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = \frac{-1 - 2t'}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{-1 + 2t'}{2\sqrt{2}} \\ z = t', \quad t' \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

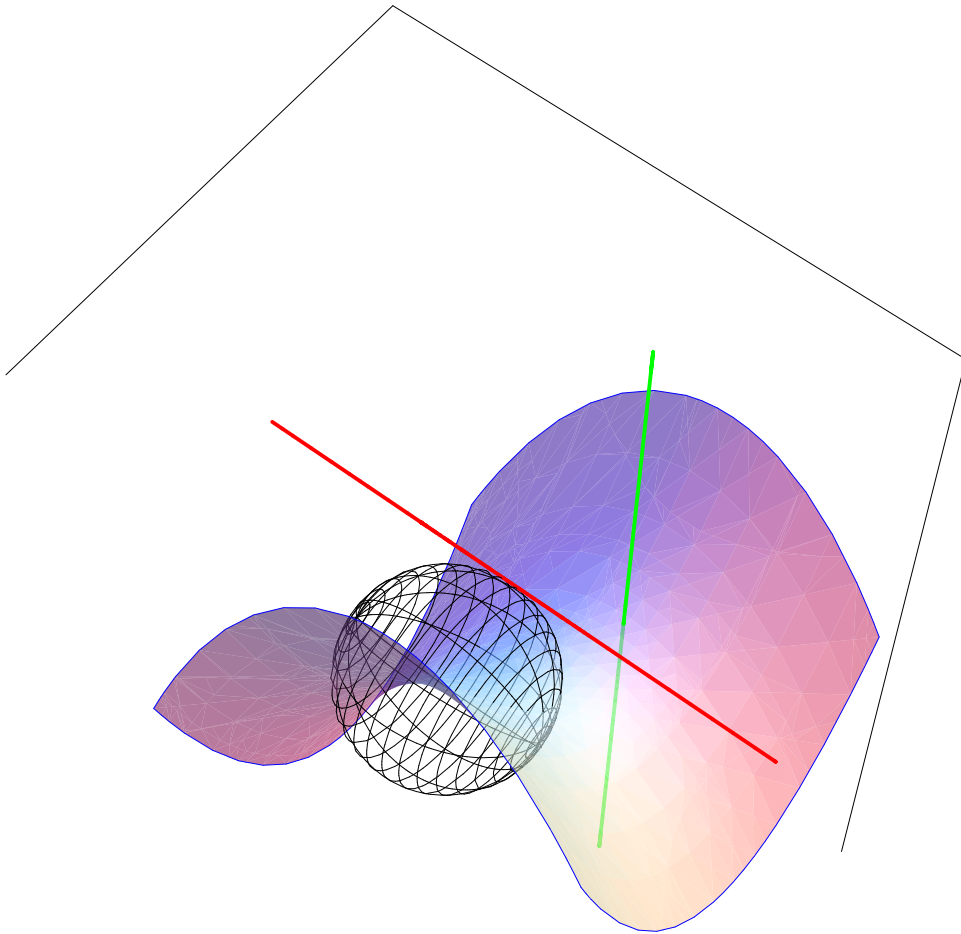


Figura 12.38: Esercizio 12.23

La retta che unisce il punto generico di r con il punto generico di s ha perciò equazione:

$$\frac{x - \frac{1+2t}{2\sqrt{2}}}{\frac{1+2t}{2\sqrt{2}} + \frac{1+2t'}{2\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1-2t}{2\sqrt{2}}}{\frac{1-2t}{2\sqrt{2}} + \frac{1-2t'}{2\sqrt{2}}} = \frac{z-t}{t-t'}$$

che si semplifica nell'espressione seguente:

$$\frac{2\sqrt{2}x - (1+2t)}{2+2t+2t'} = \frac{2\sqrt{2}y - (1-2t)}{2-2t-2t'} = \frac{z-t}{t-t'}$$

Se si impone poi che tale retta sia parallela al piano π , si ottiene $t = -t'$, che permette di scrivere l'equazione precedente nella forma:

$$2\sqrt{2}x - (1+2t) = 2\sqrt{2}y - (1-2t) = \frac{z-t}{t}$$

e rappresenta, al variare del parametro t , la generica retta del luogo geometrico richiesto. Essa si può anche scrivere come intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x - (1+2t) - 2\sqrt{2}y + (1-2t) = 0 \\ t(\sqrt{2}y - 1 + 2t) - z + t = 0. \end{cases}$$

Dall'equazione del primo piano si ricava:

$$2t = \sqrt{2}(x-y)$$

e sostituendo l'espressione di t nell'equazione del secondo piano si perviene a:

$$x^2 - y^2 = z,$$

che rappresenta l'equazione del luogo geometrico. Come si può osservare, si ottiene un paraboloido iperbolico.

12.7 Esercizi di riepilogo svolti

Esercizio 12.24 – Il cono-cuneo di Wallis – Sono dati una retta a , una circonferenza \mathcal{C} che giace su un piano π , parallelo ad a , il cui centro appartiene alla retta ortogonale a π condotta da un punto di a ad un piano π' perpendicolare ad a . Determinare l'equazione del luogo geometrico delle rette che si appoggiano alla circonferenza \mathcal{C} , alla retta a e sono parallele a π' .

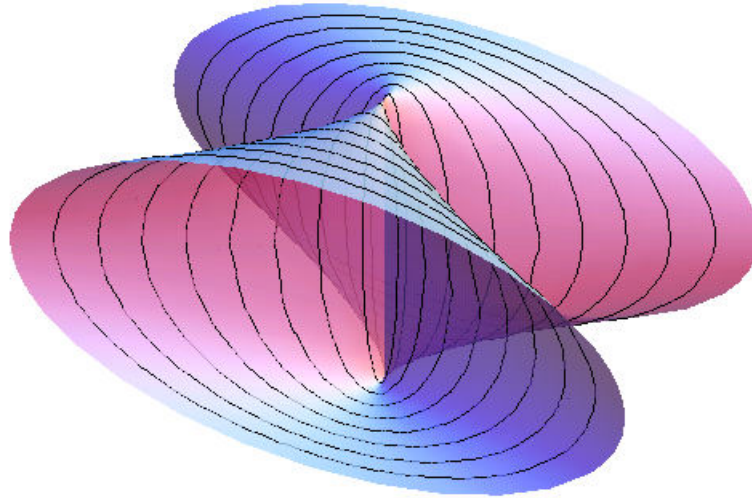


Figura 12.39: Esercizio 12.24

Soluzione Per semplicità si scelga a coincidente con l'asse z del riferimento cartesiano e la circonferenza \mathcal{C} sul piano $y = k$, con centro sull'asse y e raggio r . Detti P un punto generico di \mathcal{C} e Q un punto generico di a , la retta PQ ha equazioni:

$$\frac{X}{r \cos \varphi} = \frac{Y}{k} = \frac{Z - z}{r \sin \varphi - z} = t.$$

Se si impone che a sia parallela al piano $z = 0$, segue:

$$r \sin \varphi - z = 0, \quad z = r \sin \varphi$$

e quindi le equazioni del luogo richiesto sono:

$$\begin{cases} X = tr \cos \varphi \\ Y = tk \\ Z = r \sin \varphi, \quad t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Per pervenire all'equazione cartesiana si ricava:

$$\begin{cases} \frac{kX}{rY} = \cos \varphi \\ \frac{Z}{r} = \sin \varphi, \end{cases}$$

ossia:

$$\frac{(kX)^2}{(rY)^2} + \frac{Z^2}{r^2} = 1,$$

da cui si ottiene:

$$Z^2Y^2 + k^2X^2 - r^2Y^2 = 0.$$

La superficie appena descritta, che prende il nome di *cono-cuneo di Wallis* è rappresentata nella Figura 12.39, si osservi, inoltre, che si tratta di una superficie rigata.

Esercizio 12.25 – Il conoide retto di Plücker – Si considerino un'ellisse \mathcal{E} con le lunghezze dei semiassi a , b legate dalla relazione $a = \sqrt{2}b$ e i vertici nei punti A e A' sull'asse maggiore e nei punti B e B' sull'asse minore, il piano π passante per l'asse minore AB di \mathcal{E} sia inclinato di $\pi/4$ sul piano di \mathcal{E} e si consideri, inoltre, una retta r per A ortogonale a π . (Si osservi che \mathcal{E} si proietta ortogonalmente sul piano π in una circonferenza). Determinare l'equazione del luogo delle rette che si appoggiano ad \mathcal{E} e ad r e sono parallele al piano π .

Soluzione Si scelgano il punto A come origine, le rette AB ed r quali assi x e z rispettivamente. Detti $P = (b(1 - \cos \varphi), b \sin \varphi, b \sin \varphi)$ un punto generico dell'ellisse \mathcal{E} e $Q = (0, 0, \lambda)$ un punto generico di r , la retta PQ ha equazione:

$$\frac{x}{b(1 - \cos \varphi)} = \frac{y}{b \sin \varphi} = \frac{z - \lambda}{b \sin \varphi - \lambda} = t.$$

Imponendo il parallelismo al piano π ($z = 0$), si ricava $\lambda = b \sin \varphi$ e le equazioni parametriche del luogo richiesto sono:

$$\begin{cases} x = tb(1 - \cos \varphi) \\ y = tb \sin \varphi \\ z = b \sin \varphi, \quad t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana si calcola:

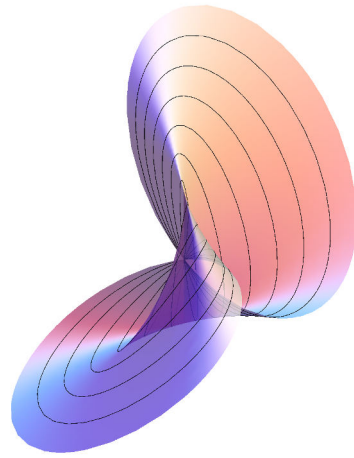


Figura 12.40: Esercizio 12.25

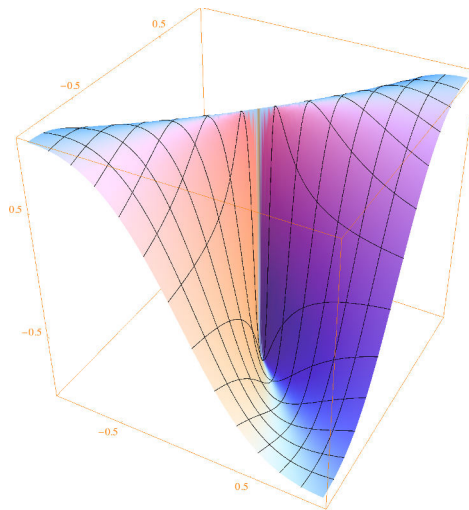


Figura 12.41: Esercizio 12.25

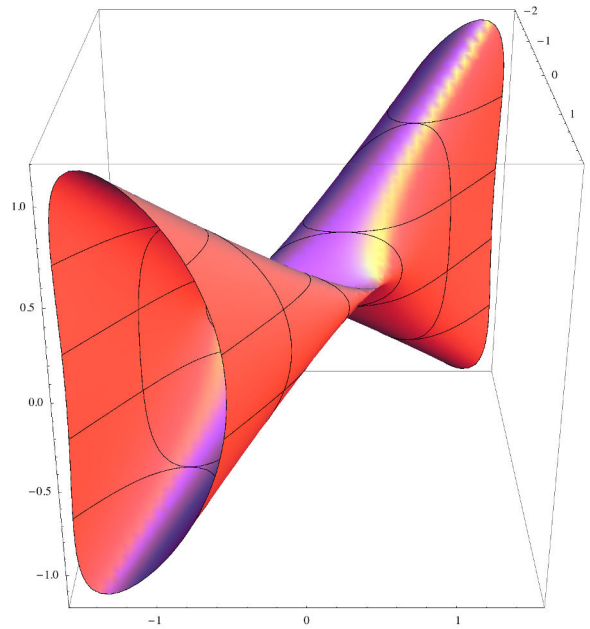


Figura 12.42: Esercizio 12.26

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= t^2 b^2 (1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= t^2 b^2 (2 - 2 \cos \varphi) = 2tb[tb(1 - \cos \varphi)] = 2tbx. \end{aligned}$$

Poichè $t = y/z$, sostituendo nell'espressione precedente si ha:

$$(x^2 + y^2)z = 2bxy,$$

che è l'equazione cercata. La superficie così ottenuta prende il nome di *conoide retto di Plücker* ed è rappresentata, da due diverse angolazioni, nelle Figure 12.40 e 12.41. Anche il conoide di Plücker è un esempio di superficie rigata.

Esercizio 12.26 – La superficie dalla volta a sbieco – Si considerino due coniche \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , aventi due punti in comune, situate in piani diversi e sia d una retta che non incontri le due coniche date. Dimostrare che il luogo geometrico delle rette che si appoggiano contemporaneamente a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, d$ è una superficie rigata, la cui equazione in forma implicita è un polinomio di sesto grado in x, y, z .

Soluzione Come caso particolare si supponga che \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 siano due circonferenze, aventi lo stesso raggio, di centro i punti O_1 e O_2 , rispettivamente. Gli altri casi sono lasciati al Lettore per esercizio. Si supponga, inoltre, che \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 appartengano a piani

paralleli e non perpendicolari alla retta O_1O_2 che unisce i loro centri. Si consideri come direttrice la retta d normale ai due piani, contenenti le circonferenze, e passante per il punto medio O del segmento O_1O_2 . Per ragioni di simmetria il cono che da O proietta \mathcal{C}_1 contiene anche \mathcal{C}_2 e, quindi, fa parte del luogo geometrico cercato; escludendolo, rimane, come elemento dello stesso luogo, una superficie, che si vedrà avere un'equazione di quarto grado che, per la sua forma particolare, viene detta *volta a sbieco*. Per ricavare esplicitamente l'equazione del luogo geometrico si posizioni il riferimento cartesiano con l'origine nel punto O , la retta d quale asse y e si faccia passare il piano $z = 0$ per O_1 ed O_2 . Siano:

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x^2 + z^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y + k = 0, \end{cases} \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x^2 + z^2 + 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y - k = 0, \end{cases}$$

le equazioni di \mathcal{C}_1 e di \mathcal{C}_2 . Il piano $x = mz$, passante per la retta d , incontra \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , rispettivamente nei punti $P = (m\gamma, -k, \gamma)$ e $Q = (m\delta, k, \delta)$ con γ e δ che verificano le equazioni:

$$\begin{cases} (1 + m^2)\gamma^2 - 2hm\gamma + h^2 - r^2 = 0 \\ \gamma - \delta = \frac{2hm}{1 + m^2}. \end{cases} \quad (12.39)$$

La retta PQ ha equazioni:

$$\begin{cases} x = mz \\ (\delta - \gamma)(y + k) = 2k(z - \gamma). \end{cases} \quad (12.40)$$

Eliminando tra le equazioni (12.39) e (12.40) i parametri m, γ e δ si ottiene l'equazione cercata:

$$[k(x^2 + z^2) + hxy]^2 - k^2[r^2x^2 + (r^2 - h^2)z^2] = 0.$$

Nel Figura 12.42 è rappresentata la volta a sbieco ottenuta ponendo $k = 1, h = 2, r = 1$.

Esercizio 12.27 – Elicoide retto – Trovare il luogo geometrico delle rette che si appoggiano all'elica circolare cilindrica di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = h\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.41)$$

e all'asse z e sono parallele al piano xy , al variare del parametro reale φ .

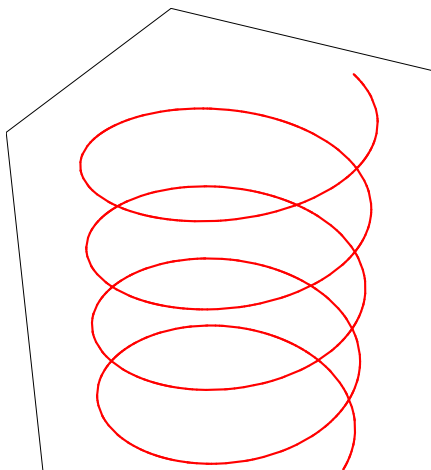


Figura 12.43: Elica cilindrica

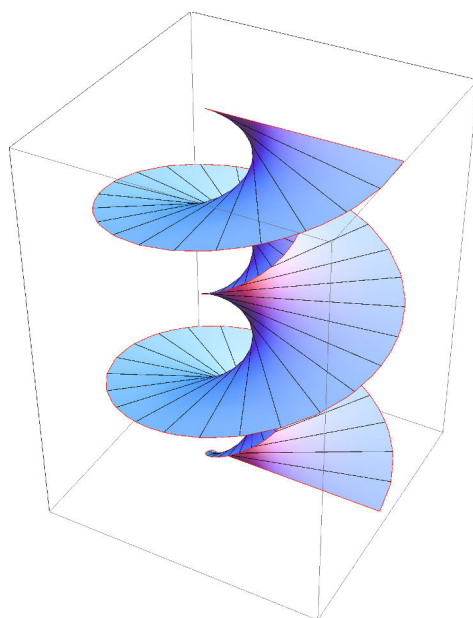


Figura 12.44: Esercizio 12.27

Soluzione L'*elica circolare cilindrica*, rappresentata nella Figura 12.43, è una curva nello spazio, dalle sue equazioni parametriche (12.41) si evince che si tratta semplicemente di una circonferenza del piano xy che si avvolge intorno all'asse z con un *passo* che varia al variare di h , pertanto la curva giace sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ da cui la sua denominazione. La retta generica del luogo geometrico richiesto unisce i punti P e Q dati da:

$$P = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, h\varphi), \quad Q = (0, 0, h\varphi)$$

ed ha perciò equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x - R \cos \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{y - R \sin \varphi}{R \sin \varphi} = u \\ z = h\varphi, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Essa si può anche scrivere nella forma parametrica seguente:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi + uR \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi + uR \sin \varphi \\ z = hu, \end{cases} \quad u, \varphi \in \mathbb{R},$$

che rappresenta il luogo geometrico, al variare dei parametri reali φ e u . Si può vedere questa superficie, detta *elicoide retto*, rappresentata nella Figura 12.44. Anche l'*elicoide retto* è un esempio di superficie rigata.

Esercizio 12.28 – Vite di Saint Gilles – Determinare l'equazione del luogo geometrico descritto da una circonferenza \mathcal{C} avente raggio r , centro in un punto generico dell'*elica circolare cilindrica* di equazioni (12.41) e appartenente ad un piano passante per l'asse z .

Soluzione Il piano π , passante per un punto C dell'*elica* e per l'asse z , ha equazione:

$$\pi : x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

Su π si sceglie il riferimento ortonormale formato da un vettore \mathbf{u}_1 parallelo a π , sia $\mathbf{u}_1 = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$, e da un vettore \mathbf{u}_2 parallelo a π ed ortogonale a \mathbf{u}_1 , ad esempio $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \wedge (\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$. Perciò due versori ortogonali tra di loro e paralleli a π sono:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = -\mathbf{k}.$$

Una rappresentazione vettoriale parametrica della circonferenza \mathcal{C} sul piano π è quindi:

$$P = C + r(\cos u \mathbf{v}_1 + \sin u \mathbf{v}_2),$$

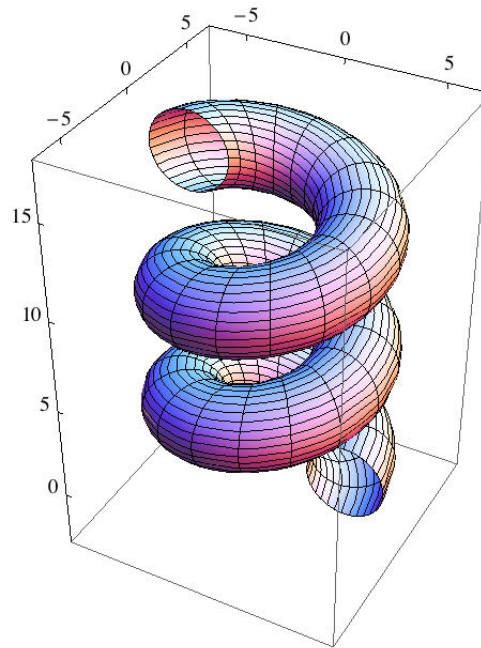


Figura 12.45: Esercizio 12.28

ossia:

$$P = R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j} + h\varphi \mathbf{k} + r[\cos u(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) - \sin u \mathbf{k}],$$

dalla quale si ottiene la rappresentazione parametrica:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = R \cos \varphi + r \cos \varphi \cos u \\ y = R \sin \varphi + r \sin \varphi \cos u \\ z = h\varphi - r \sin u, \quad u, \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

che, al variare di φ e di u , descrive una superficie \mathcal{S} , che è il luogo geometrico richiesto e che, per la sua conformazione, viene detta *vite di Saint Gilles* ed è rappresentata nella Figura 12.45.

Esercizio 12.29 – Colonna torsa – Determinare l'equazione del luogo geometrico descritto da una circonferenza \mathcal{C} , di raggio r , con il centro in un punto generico dell'elica circolare cilindrica di equazioni (12.41) e appartenente ad un piano π che si mantiene ortogonale all'asse z , al variare del parametro φ in \mathbb{R} .

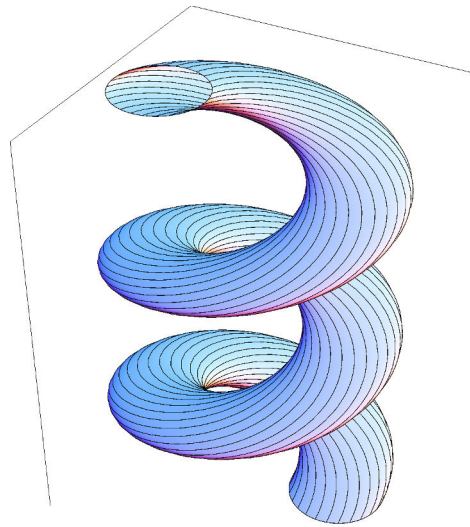


Figura 12.46: Esercizio 12.29

Soluzione Sul piano π passante per un punto C di \mathcal{C} ed ortogonale all'asse z si può scegliere come base ortonormale (\mathbf{i}, \mathbf{j}) . Di conseguenza, la rappresentazione vettoriale parametrica della circonferenza \mathcal{C} di π con centro C e raggio r è:

$$P = C + r(\cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j}),$$

ossia:

$$P = R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j} + h\varphi \mathbf{k} + r \cos u \mathbf{i} + r \sin u \mathbf{j},$$

dalla quale si ottiene la rappresentazione cartesiana parametrica:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = R \cos \varphi + r \cos u \\ y = R \sin \varphi + r \sin u \\ z = h\varphi, \quad u, \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

che, al variare dei parametri φ ed u , genera il luogo geometrico \mathcal{S} richiesto che è la superficie rappresentata nella Figura 12.46 e che prende il nome di *colonna torsa* per la sua particolare conformazione.

12.8 Per saperne di più

12.8.1 Piano tangente ad una quadrica in un suo punto

In questo paragrafo si accenna in modo molto intuitivo, senza alcuna pretesa di rigore matematico, al procedimento da seguire per determinare l'equazione del piano tangente ad una quadrica in un suo punto, e più in generale del piano tangente ad una superficie in suo punto. Si otterrà un risultato che estende in modo naturale la formula che permette di determinare la retta tangente ad una conica in un suo punto non singolare (cfr. Par. 10.8). Un esempio di questo tipo è il piano tangente ad una sfera in un suo punto che è stato ricavato mediante semplici considerazioni geometriche nel Paragrafo 11.7.2. Se Σ è la sfera di equazione:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

il piano tangente a Σ in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ ha equazione (cfr. Par.11.7.2):

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli indicati si ottiene:

$$x_0x + y_0y + z_0z - \alpha x - \beta y - \gamma z - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$$

e, tenuto conto dell'appartenenza di P_0 a Σ , segue:

$$x_0x + y_0y + z_0z - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) - \gamma(z + z_0) + \delta = 0. \quad (12.42)$$

Se si scrive l'equazione di Σ in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

con:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & \delta \end{pmatrix},$$

l'equazione (12.42) del piano tangente a Σ in P_0 diventa:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (12.43)$$

Si intende dimostrare un teorema che estende la formula (12.43) al caso del piano tangente ad una quadrica in un suo punto di tipo particolare. Si devono però premettere sia la definizione formale di piano tangente ad una superficie sia la definizione dei punti della superficie in cui è possibile considerare il piano tangente, per esempio intuitivamente è chiaro che non è possibile definire il piano tangente ad un cono nel suo vertice. Si inizia quindi con la definizione di punto singolare di una quadrica, che estende l'analogia definizione di punto singolare di una conica (cfr. Def. 10.9).

Definizione 12.10 Sia \mathcal{Q} una quadrica di equazione $f(x, y, z) = 0$, dove $f(x, y, z)$ è il polinomio di secondo grado in x, y, z che definisce \mathcal{Q} , e sia P_0 un suo punto. P_0 è un punto singolare di \mathcal{Q} se il vettore:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right)$$

è uguale al vettore nullo, dove con $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ si indicano, rispettivamente, le derivate parziali di f rispetto a x, y, z . In caso contrario il punto P_0 si dice regolare.

- Esercizio 12.30**
1. Si verifichi che il vertice di un cono è un punto singolare.
 2. Si verifichi che tutti i punti di una quadrica non degenera sono regolari.

Anche la definizione di piano tangente ad una quadrica in suo punto non singolare estende la definizione di retta tangente ad una conica in un suo punto (cfr. Def. 10.8) nel modo seguente.

Definizione 12.11 Il piano tangente ad una quadrica \mathcal{Q} in un suo punto non singolare P_0 è il luogo delle rette tangenti in P_0 a tutte le curve che giacciono sulla superficie \mathcal{Q} e che passano per P_0 .

Osservazione 12.7 È chiaro che una retta r si dice *tangente* ad una quadrica \mathcal{Q} in un suo punto P_0 se la retta r ha due intersezioni riunite in P_0 con la quadrica \mathcal{Q} . Invece se una retta r interseca una quadrica \mathcal{Q} in un solo punto *non* è detto che sia tangente a \mathcal{Q} in quel punto. Si consideri, ad esempio, l'asse di rotazione di un paraboloido di rotazione che interseca solo nel vertice del paraboloido il paraboloido stesso senza essere ad esso tangente.

Il paragrafo si conclude con la dimostrazione del teorema annunciato.

Teorema 12.6 Sia \mathcal{Q} la quadrica di equazione:

$$\mathcal{Q} : (x \ y \ z \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

indica la matrice simmetrica di ordine 4 ad essa associata. Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di \mathcal{Q} non singolare, allora il piano π tangente alla quadrica \mathcal{Q} nel punto P_0 è:

$$\pi : (x_0 \ y_0 \ z_0 \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (12.44)$$

Dimostrazione Si calcolino le intersezioni della generica retta r passante per P_0 di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con la quadrica \mathcal{Q} e poichè $P_0 \in \mathcal{Q}$, con semplici calcoli si ottiene la seguente equazione di secondo grado in t :

$$\begin{aligned} & (a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 + 2a_{13}ln + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn)t^2 \\ & + 2[a_{11}x_0l + a_{12}(x_0m + y_0l) + a_{22}y_0m + a_{13}(x_0n + z_0l) + a_{33}z_0n \\ & + a_{23}(y_0n + z_0m) + a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n]t = 0. \end{aligned} \quad (12.45)$$

Affinchè la retta r sia tangente alla quadrica \mathcal{Q} nel punto P_0 , essa deve avere riunite in P_0 due intersezioni con \mathcal{Q} , ciò implica che si annulli il coefficiente di t nell'equazione (12.45), ossia:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_0l + a_{12}(x_0m + y_0l) + a_{22}y_0m + a_{13}(x_0n + lz_0) + a_{33}z_0n + a_{23}(y_0n + z_0m) \\ & + a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n = 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle equazioni parametriche della retta r e del fatto che P_0 appartiene alla superficie \mathcal{Q} , svolgendo i calcoli, si ricava:

$$a_{11}x x_0 + a_{22}y y_0 + a_{33}z z_0 + a_{12}(x_0 y + x y_0) + a_{13}(x_0 z + x z_0) + a_{23}(y_0 z + y z_0) + a_{14}(x + x_0) + a_{24}(y + y_0) + a_{34}(z + z_0) + a_{44} = 0, \quad (12.46)$$

che coincide con l'equazione (12.44).

Osservazione 12.8 1. Si osservi che l'equazione (12.46) si può ottenere estendendo in modo evidente la regola degli sdoppiamenti introdotta nel Paragrafo 10.8 per ricavare la retta tangente ad una conica in suo punto, con l'avvertenza che, in questo caso si devono *sdoppiare* i termini x^2, y^2, z^2 nei prodotti x_0x, y_0y, z_0z , i termini $2xy, 2xz, 2yz$ nelle somme $xy_0 + x_0y, xz_0 + x_0z, y_0z + yz_0$ e i termini $2x, 2y, 2z$ nelle somme $x + x_0, y + y_0, z + z_0$.

2. L'equazione del piano tangente ad una sfera Σ scritta come $f(x, y, z) = 0$ in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ si può anche ottenere come:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0, \quad (12.47)$$

il vettore:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right)$$

prende il nome di *gradiente* di f calcolato nel punto P_0 .

3. Si dimostra che, nel caso di una superficie \mathcal{S} di equazione cartesiana $f(x, y, z) = 0$, con $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione differenziabile, se per un punto P_0 appartenente a \mathcal{S} esistono e non sono nulle le derivate parziali di f , cioè se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right) \neq \mathbf{o}$$

allora il piano tangente a \mathcal{S} in P_0 ha equazione (12.47). Per maggiori dettagli si rimanda a testi classici di teoria delle superfici differenziabili, quali, ad esempio, [6] o [11].

Esercizio 12.31 Data la quadrica \mathcal{Q} di equazione:

$$\mathcal{Q} : x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x - 2y - 6z - 9 = 0,$$

1. precisare di quale tipo di quadrica si tratta.
2. Verificare che il punto $A = (1, -1, 0)$ appartiene ad \mathcal{Q} e determinare le equazioni delle rette tangenti in A ad \mathcal{Q} e delle rette passanti per A e appartenenti ad \mathcal{Q} .
3. Scrivere l'equazione del piano π luogo delle rette tangenti a \mathcal{Q} nel punto A e verificare che π si può determinare mediante la regola degli sdoppiamenti applicata all'equazione di \mathcal{Q} in relazione al punto A .

Soluzione 1. A partire dall'equazione di \mathcal{Q} , utilizzando il metodo del completamento dei quadrati, si ha:

$$(x+2)^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - (z+3)^2 = \frac{9}{2},$$

\mathcal{Q} è quindi un iperboloide ad una falda con centro nel punto $(-2, 1/2, -3)$.

2. Si verifica immediatamente che $A = (1, -1, 0) \in \mathcal{Q}$. Scelta una retta qualsiasi r passante per A :

$$r : \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = -1 + mt \\ z = nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12.48)$$

la si interseca con \mathcal{Q} e si ottiene l'equazione:

$$(l^2 + 2m^2 - n^2)t^2 + (6l - 6m - 6n)t = 0.$$

La retta r è tangente a \mathcal{Q} in A se e solo se $t = 0$ è soluzione doppia, ossia se e solo se:

$$l - m - n = 0.$$

La retta r è contenuta in \mathcal{Q} se e solo se:

$$\begin{cases} l^2 + 2m^2 - n^2 = 0 \\ l - m - n = 0, \end{cases}$$

da cui si hanno le due soluzioni:

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = l, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2l \\ n = 3l, \end{cases}$$

in corrispondenza alle quali si ottengono le due rette r_1 , parallela a $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 1)$ e r_2 parallela a $\mathbf{r}_2 = (1, -2, 3)$ che appartengono a \mathcal{Q} .

3. Imponendo che la retta r di equazioni (12.48) sia tangente a \mathcal{Q} nel punto A si ottiene la relazione $l - m - n = 0$ da cui segue che il piano π è:

$$\pi : (x - 1) - (y + 1) - z = 0,$$

che coincide con l'equazione del piano tangente all'iperboloide in A ricavata con la regola degli sdoppiamenti.

Nella Figura 12.47 sono rappresentati l'iperboloide e il piano ad esso tangente nel punto A . Si vedono anche le due rette di intersezione del piano tangente con la superficie ed è evidente che il piano tangente all'iperboloide interseca la superficie in più di un punto. Si può infatti dimostrare che, nel caso dell'iperboloide ad una falda, il piano tangente in ogni suo punto interseca la superficie nelle due rette (una per ciascuna schiera) passanti per tale punto e la superficie si dispone in entrambi i semispazi in cui il piano tangente divide lo spazio. È molto intuitivo riconoscere che questa situazione, invece, non si presenta nel caso dell'ellissoide in cui il piano tangente in ogni suo punto interseca la superficie solo nel punto di tangenza e la superficie si dispone in uno solo dei due semispazi in cui il piano tangente divide lo spazio. La differenza tra le due situazioni geometriche è legata al concetto di *curvatura Gaussiana* della superficie, che è una funzione che ad ogni punto della superficie associa un numero reale che in qualche modo precisa come la superficie si incurvi in quel punto, nel caso dell'ellissoide la curvatura è positiva in ogni punto invece nel caso dell'iperboloide ad una falda la curvatura è negativa. Si possono leggere i dettagli di ciò che è stato ora accennato per esempio su [6] o su [11].

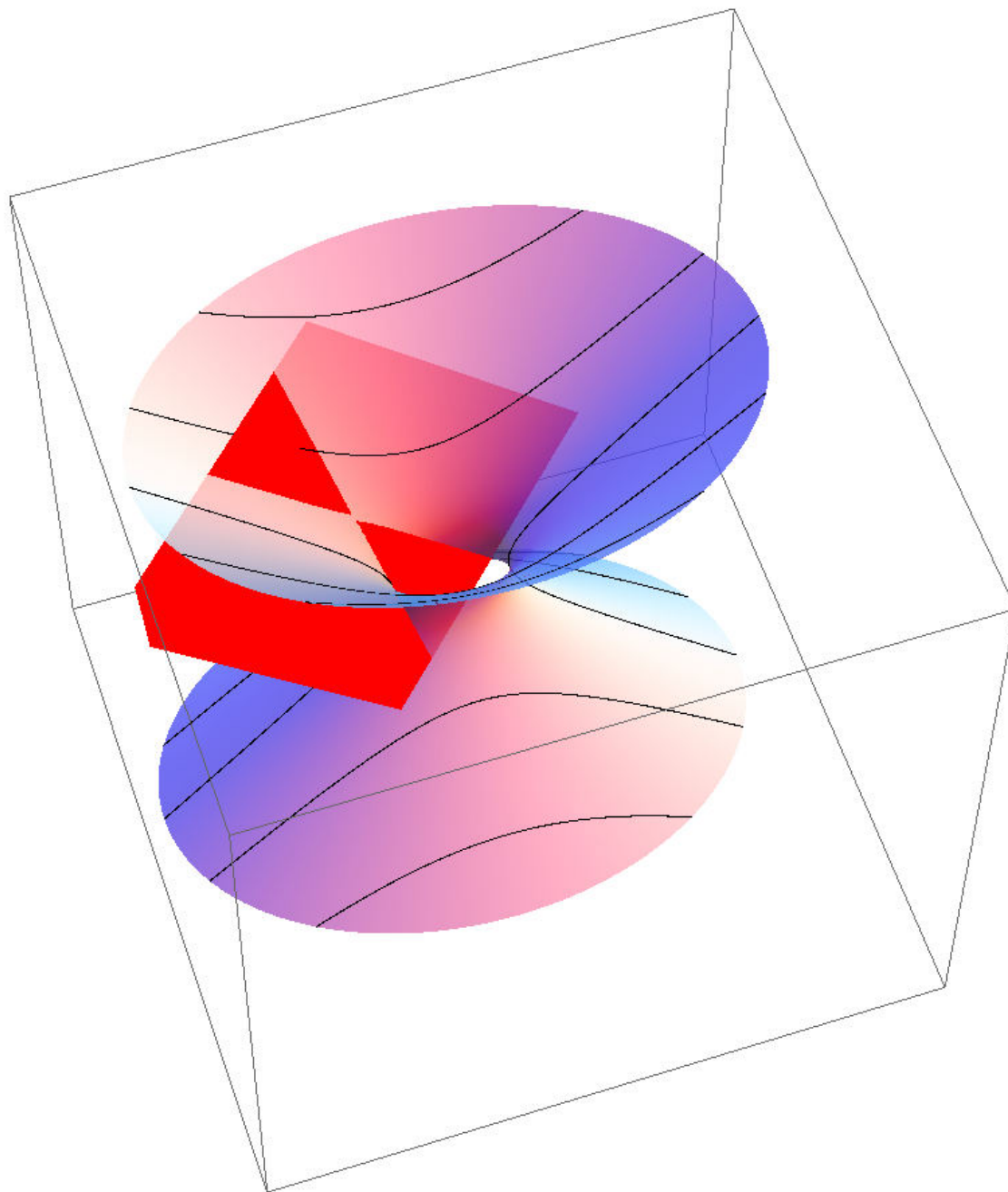


Figura 12.47: Esercizio 12.30

Bibliografia

- [1] H. Anton, C. Rorres: *Elementary Linear Algebra: Application Version*, Editrice Wiley, John & Sons, 1991.
- [2] A. Baker: *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Editrice Springer, London, 2002.
- [3] R. Bellman: *Introduction to Matrix Analysis*, Editrice McGraw-Hill, New York, 1960.
- [4] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: *Matematica Calcolo Infinitesimale e Algebra Lineare*, seconda edizione, Editrice Zanichelli, Bologna, 2004.
- [5] H. Cartan: *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables* translated from the French. Reprint of the 1973 edition. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
- [6] M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Editrice Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River New Jersey, 1976.
- [7] F. Fava, F. Tricerri: *Geometria e Algebra lineare*, Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1987.
- [8] F. Fava: *Lezioni di Geometria analitica*, Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1960.
- [9] F. Fava: *Lezioni di Geometria*, Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1973.
- [10] F. Fava: *Elementi di Algebra Lineare e Geometria*, Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1976.
- [11] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Third Edition, Editrice CRC Press, Boca Raton, 2006.
- [12] S. Greco, P. Valabrega: *Lezioni di Geometria*, Voll.I e II, Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1999.

- [13] B.C. Hall: *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Graduate Texts in Mathematics 222, Editrice Springer, New York, 2003.
- [14] S. Lang: *Linear Algebra*, Editrice Addison Wesley, New York, 1966.
- [15] S. Roman: *Advanced Linear Algebra*, Editrice Springer, Berlin, 2008.
- [16] A. Sanini: *Lezioni di Geometria*, Editrice Levrotto e Bella, Torino , 1993.
- [17] E. Sernesi: *Geometria 1 e 2*, Editrice Bollati Boringhieri, 1989.
- [18] M. Stoka: *Corso di Geometria*, Editrice Cedam, Padova, 1995.
- [19] A. Sheldon, *Linear Algebra Done Right*, Editrice Springer, 1997.
- [20] A. E. Taylor: *Introduction to Functional Analysis*, Editrice John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1958.