COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 5 punti.

Consegnare SOLO BELLA COPIA.

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , con un prodotto scalare. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vettori di V , non nulli, a due a due ortogonali. Mostrare che formano una base di V .

Sol.: Vedi qualunque testo di algebra lineare (questo esercizio è stato dato anche ad uno degli scritti di luglio).

2. Siano $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ e $g: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ le applicazioni lineari date rispettivamente dalle matrici

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare l'immagine di F . È iniettiva?
- (b) Determinare il nucleo di G . È suriettiva?
- (c) Determinare se $f \circ g$ è o meno biiettiva.

Sol.: (a) L'immagine di f è generata dalle colonne di F . Abbiamo

$$\text{rango}(F) = 3 = \dim \text{Im}(f) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \ker(f) = 3 - \dim \ker(f).$$

Ne segue che $\dim \ker(f) = 0$, e dunque f è iniettiva.

(b)

$$\ker(g) = \text{Sol} \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad \dim \ker(g) = 2,$$

da cui

$$\dim \text{Im}(g) = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \ker(g) = 4 - 2 = 2 < 3.$$

In particolare g non è suriettiva.

(c) $f \circ g: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ è l'applicazione lineare con matrice rappresentativa

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango minore di 4. Dunque $f \circ g$ non è né iniettiva né suriettiva.

3. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^4$ dal sottospazio

$$U = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Sol.: Il punto P non appartiene ad U , per cui ha distanza positiva da U . Abbiamo

$$U = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Poiché $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono una base ortogonale di U ,

$$d(P, U) = d(P, \pi_U(P)) = d(P, \pi_{\mathbf{u}}(P) + \pi_{\mathbf{v}}(P)) = d\left(P, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{6}/2.$$

Qui π_U , $\pi_{\mathbf{u}}$ e $\pi_{\mathbf{v}}$ indicano rispettivamente le proiezioni ortogonali su U , su $\mathbf{u}$ e su $\mathbf{v}$.

4. Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che fissa $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ma scambia i due vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica, in dominio e codominio.

Sol.: La matrice di f nella base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in dominio e codominio è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(le colonne di M contengono le coordinate di $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$, $f(\mathbf{w})$ nella base B).

La matrice è data da $\widetilde{M} = CMC^{-1}$, dove $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base da B alla base canonica. Dai calcoli troviamo

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che casualmente coincide con M .

5. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f \circ f \equiv 0$ (qui 0 indica l'applicazione identicamente nulla).
- (a) Sia λ un autovalore di f . Mostrare che $\lambda = 0$.
- (b) Dare un esempio di applicazione f come sopra, non identicamente nulla. (V può essere scelto a piacere).

Sol.: (a) Sia λ un autovalore di f e sia $\mathbf{v} \neq 0$ un suo autovettore. Allora

$$f \circ f(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v} = 0.$$

Ne segue che $\lambda = 0$.

(b) Un esempio di applicazione $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ come sopra è dato da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

6. Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano π di equazione $2x - y = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare la traccia di una matrice rappresentativa di f .

Sol.: Se prendiamo ad esempio una base $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ di $\mathbf{R}^3$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \pi$ e $\mathbf{w} \in \pi^\perp$, allora la matrice rappresentativa di f rispetto a tale base (in dominio e codominio) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la sua traccia è 2.