GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 5 Roma, 7 settembre 2020, ore 10-12:30.

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. *Dato il piano* $\pi: \quad x-y-z=1$, *scrivere due rette sghembe, entrambe parallele a* $\pi$.

*Sol.*: Le rette richieste devono stare su piani distinti, paralleli a $\pi$. In particolare, avranno vettori della direzione, non collineari, appartenenti al piano $x-y-z=0$. Ad esempio

$$r: \quad X=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}, \qquad s: \quad X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ s\in\mathbf{R}.$$

Sono parallele a $\pi$, non sono parallele fra loro e non sono incidenti: la retta $r$ appartiene a $x-y-z=0$, mentre la retta $s$ appartiene al piano $x-y-z=-1$.

2. *Determinare la dimensione di* $U\cap V$, *dove* $U$ *e* $V$ *sono i sottospazi di* $\mathbf{R}^4$

$$U=\{X\in\mathbf{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\} \qquad e \qquad V=\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}\}.$$

*Sol.*: Si verifica facilmente che $\dim U=\dim V=3$. Quindi $\dim U\cap V\geq 2$, per la formula di Grassmann. Se fosse $\dim U\cap V=3$, allora avremmo $U=V$. Il che è falso perché ad esempio $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\notin U$. In conclusione, $\dim U\cap V=2$.

3. *Siano* $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $F\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $F(X)=X\times\mathbf{u}$ *per* $X\in\mathbf{R}^3$ *(qua* $\times$ *indica il prodotto vettoriale).*
   (a) *Determinare la matrice rappresentativa di* $F$ *(nella base canonica in dominio e codominio).*
   (b) *Determinare se esiste un vettore* $X\in\mathbf{R}^3$ *tale che* $F(X)=\mathbf{v}$*: se esiste, determinarne uno e dire se è unico, altrimenti spiegare perché non esiste.*
   (c) *Fare lo stesso per* $F(X)=\mathbf{w}$.

*Sol.*: (a) Abbiamo

$$F(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\x_1+x_3\\x_1-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Per cui la matrice rappresentativa di $F$ è appunto $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

(b)&(c) L'immagine di $F$ è il piano ortogonale a $\mathbf{u}$, di equazione $x_1+x_2-x_3=0$. Ne segue che l'equazione $F(X)=\mathbf{v}$ non ha soluzioni, in quanto $\mathbf{v}\notin\mathbf{u}^\perp$. Invece $\mathbf{w}\in\mathbf{u}^\perp$, e l'equazione $F(X)=\mathbf{w}$ ammette infinite soluzioni.

4. *Siano dati i vettori* $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^3$.

(a) *Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare* $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, *determinata dalle condizioni*

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad F(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad F(\mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

*nella base* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *in dominio e codominio.*

(b) *Scrivere la matrice rappresentativa di* $F$ *nella base canonica in dominio e codominio.*

*Sol.*: (a) La matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $F$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice rappresentativa di $F$ nella base canonica è data da $B = CAC^{-1}$, dove $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice dl cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Dai calcoli troviamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Siano date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) *Determinare se* $A$ *e* $B$ *sono diagonalizzabili.*

(b) *Determinare se* $A$ *e* $B$ *sono coniugate.*

*Sol.*: Entrambe le matrici hanno autovalori reali e distinti dati da $\lambda = 2$ e $\mu = 3$. Dunque sono entrambe diagonalizzabili, coniugate alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ed in particolare coniugate fra loro:

$$CAC^{-1} = DBD^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = (C^{-1}D)B(C^{-1}D)^{-1}.$$

6. *Data la forma quadratica* $Q(x, y, z) = 2xy + 2yz$, *considerare la quadrica*

$$\mathcal{Q} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid Q(x, y, z) = 1 \}.$$

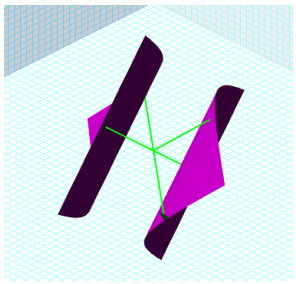
(a) *Determinare che tipo di quadrica è.*

(b) *Farne un disegno approssimativo.*

*Sol.*: La matrice simmetrica associata alla forma quadratica $Q$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda = \sqrt{2}$, $\mu = -\sqrt{2}$ e $\sigma = 0$. Dunque, tramite un cambiamento di coordinate isometrico in $\mathbf{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

la forma quadratica $Q$ diventa $\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2$. In particolare la quadrica $\mathcal{Q}$ è un cilindro iperbolico.