GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 4 Roma, 10 luglio 2020, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO BELLA COPIA.

1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, con un prodotto scalare. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V, non nulli, a due a due ortogonali. Mostrare che formano una base di V.*

Sol: Vedi un qualunque libro di algebra lineare.

2. *Sia* $F: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, *l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) *Determinare la dimensione di* $\ker(F) \cap U$, *dove* $U = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\}$.
   (b) *Determinare la dimensione di* $F(U)$.

Sol.: (a) La matrice A ha rango 2 e

$$\ker F = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad \dim\ker F = 2.$$

Sostituendo i generatori di $\ker(F)$ nelle equazioni di U, si trova che $\ker(F) \cap U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e dunque $\dim\ker(F) \cap U = 0$.

(b) Poiché vale $\dim U = \dim F(U) + \dim(\ker F \cap U)$, dal risultato del punto (a) segue che $\dim F(U) = 2$. Alternativamente, determinare una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di U e verificare che $F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2)$ rimangono linearmente indipendenti.

3. *Siano A e B matrici $n \times n$ con* $\det(A) = 2$ *e* $\det(B) = 5$. *Calcolare* $\det(A^2 \cdot {}^tA)$ *e* $\det(A^{-1} \cdot 3B)$.

Sol: Usando le proprietà del determinante (vedi testo...), troviamo

$$\det(A^2 \cdot {}^tA) = \det(A)^3 = 8, \qquad \det(A^{-1} \cdot 3B) = \frac{1}{2} \cdot 3^n \cdot 5.$$

4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcolare* A^{100}.

Sol.: La matrice A è diagonalizzabile, con autovalori $\lambda = 3$ e $\lambda = 2$ e autospazi $V_3 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ e $V_2 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Di conseguenza

$$A = C \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{100} = C \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} \cdot \ldots \cdot C \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = C \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

5. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f \circ f = f$. Sia λ un autovalore di f.*
   (a) Mostrare che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.
   (b) Dare un esempio di applicazione f come sopra, $f \neq Id$ e non identicamente nulla. (V può essere scelto a piacere).

Sol.: (a) Sia λ un autovalore di f e sia $v \in V$, $v \neq 0$, un autovettore di f. L'ipotesi $f \circ f = f$, implica $f(f(v)) = \lambda^2 v = f(v) = \lambda v$, da cui $\lambda(\lambda - 1)v = 0$. Ne segue che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

(b) Un'applicazione f come sopra, $f \neq Id$ e non identicamente nulla, è data dalla proiezione ortogonale su un sottospazio (diverso da V e da $\{0\}$). Ad esempio

$$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. *Siano dati il piano $\pi : x_1 - x_3 = 1$ e il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$. Determinare due rette ortogonali passanti per P e parallele al piano π.*

Sol.: Il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è normale al piano π. Quindi le rette parallele al piano devono avere vettore della direzione normale a $\mathbf{n}$. Le rette

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \qquad s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbf{R}$$

sono ortogonali fra loro e parallele a π.