GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 1 Roma, 12 giugno 2020, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Siano* $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}$ *vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale* V.
   (a) Qual è la dimensione minima di V*?*
   (b) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{span}\{\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{y}-\mathbf{z},\ \mathbf{z}-\mathbf{u},\ \mathbf{x}-\mathbf{u}\}$.

Sol.: (a) Se $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}$ sono vettori linearmente indipendenti, allora $\dim V \geq 5$.
(b) Poiché $\mathbf{x}-\mathbf{u} = \mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z}+\mathbf{z}-\mathbf{u}$, abbiamo $\dim\mathrm{span}\{\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{y}-\mathbf{z},\ \mathbf{z}-\mathbf{u},\ \mathbf{x}-\mathbf{u}\} < 4$. D'altra parte

$$\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\beta(\mathbf{y}-\mathbf{z})+\gamma(\mathbf{z}-\mathbf{u}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\mathbf{x}+(-\alpha+\beta)\mathbf{y}+\mathbf{z}(-\beta+\gamma) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta=\gamma=0,$$

per cui $\dim\mathrm{span}\{\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{y}-\mathbf{z},\ \mathbf{z}-\mathbf{u},\ \mathbf{x}-\mathbf{u}\} = 3$.

2. *Determinare due sottospazi vettoriali* U *e* V *di* $\mathbf{R}^4$ *con le seguenti proprietà:* $\dim V = \dim U = 2$ *e* $\dim U + V = 3$. *Esibire una base di* $U \cap V$.

Sol.: Prendiamo ad esempio $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $V = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\}$. È immediato che $\dim V = \dim U = 2$ e $\dim U + V = 3$. Di conseguenza $\dim U \cap V = 1$ e $U \cap V$ è esattamente uguale allo span del vettore comune $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

3. *Sia* $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ *un vettore con* $\|\mathbf{v}\| = 1$ *e sia* $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, *data da* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x} \times \mathbf{v}$.
   (a) Mostrare che f *è lineare.*
   (b) Determinare le dimensioni di nucleo e immagine di f.
   (c) Determinare se f *è o meno diagonalizzabile.*

Sol.: (a) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ e $a, b \in \mathbf{R}$. Allora, dalle proprietà del prodotto vettoriale,

$$f(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = a\mathbf{x}+b\mathbf{y}-(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\times\mathbf{v} = a\mathbf{x}+b\mathbf{y}-(a\mathbf{x}\times\mathbf{v}+b\mathbf{y}\times\mathbf{v}) = a(\mathbf{x}-\mathbf{x}\times\mathbf{v})+b(\mathbf{y}-\mathbf{y}\times\mathbf{v}) = af(\mathbf{x})+bf(\mathbf{y}).$$

(b) Un vettore $\mathbf{x} \neq 0$ appartiene a $\ker f$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. Poiché $\mathbf{x} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{x}$, questo e' possibile se e solo se $\mathbf{x} = 0$. Dunque $\dim\ker(f) = 0$ e $\dim Im(f) = 3$.
(c) Una vettore $\mathbf{x} \neq 0$ è un autovettore di f se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \lambda\mathbf{x} \quad\Leftrightarrow\quad (1-\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}.$$

Poiché $\mathbf{x} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{x}$, questo è possible se e solo se $\lambda = 1$ e $\mathbf{x} = a\mathbf{v}$, per $a \in \mathbf{R}$. Quindi non ci sono tre autovettori lineramente indipendenti di f ed f non è diagonalzzabile.

4. *Sia* $L_A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *l'applicazione lineare determinata dalla matrice* $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.
   (a) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di A.
   (b) Determinare se A *è o meno diagonalizzabile.*

(c) *Determinare la dimensione dell'immagine del sottospazio* $U = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ *tramite* L_A.

Sol.: (a) Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = (\lambda-1)^3$. Quindi $\lambda = 1$ è un autovalore di L_A con molteplicità algebrica 3. L'autospazio corrispondente è

$$V_1 = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_2 = 0\} = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}, \quad \dim V_1 = 2.$$

(b) Di conseguenza f non è diagonalizzabile.

(c) Il sottospazio U coincide con V_1: è mandato identicamente in se stesso da f, per cui $\dim f(U) = 2$.

5. *Calcolare la distanza fra le rette di* $\mathbf{R}^3$

$$r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Sol.: Le rette r ed s sono contenute rispettivamente nei piani paralleli $x - z = 1$ e $x - z = 0$. Dunque non sono incidenti e $d(r,s) > 0$. Determiniamo la loro posizione reciproca mettendole in forma parametrica:

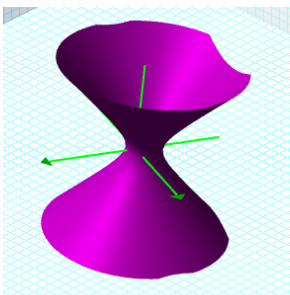
$$r: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \; s \in \mathbf{R}.$$

Le rette sono parallele. Per calcolare la distanza, fissiamo $P = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in s$. Il piano $\pi: \; x + y + z = 0$ passa per P, e è ortogonale ad s ed interseca r nel punto $Q = \begin{pmatrix}-1/3+1\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix}$. La distanza cercata è

$$d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{6/9} = \sqrt{2}/3.$$

6. *Sia data la quadrica* $Q: \; X^2 + 2X + 1 + Y^2 - Z^2 = 4$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (a) *Fare un disegno approssimativo di* Q.
   (b) *Determinare se la retta* $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ *è contenuta in* Q.

Sol.: Scriviamo $X^2 + 2X + 1 + Y^2 - Z^2 = (X+1)^2 + Y^2 = 4 + Z^2$. Adesso si capisce che Q è un iperboloide ad una falda, con asse la retta verticale passante per $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.



(b) La retta r è data dai punti $\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$, al variare di $t \in \mathbf{R}$. Sostituiti nell'equazione di Q, danno $(t+1)^2 + t - t = (t+1)^2$ che non è identicamente uguale a 4, per ogni t. Dunque r non è contenuta in Q.