GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 2 Roma, 11 febbraio 2020, ore 10-12:30.

COGNOME ..... *NOME* .....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di raggio 2 centrata in $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ uscenti dal punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Sol.: I punti di tangenza delle tangenti a C uscenti dal punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono i punti di intersezione della circonferenza C con la circonferenza di centro P e raggio $r = \sqrt{d(P,C)^2 - 4} = 4$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 20 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

Le tangenti cercate sono la retta per P e Q_1 e la retta per P e Q_2:

$$x = -1, \qquad 3x + 4y = 9.$$

2. *Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a V. Determinare il polinomio caratteristico di g.*

Sol.: La riflessione g lascia fisso il piano V e manda ogni $\mathbf{x} \in V^\perp$ in $-\mathbf{x}$. Dunque g ha un autospazio V_1 di autovalore $\lambda = 1$ di dimensione 2 e un autospazio V_{-1} di autovalore $\lambda = -1$ di dimensione 1. Il polinomio caratteristico di g è dunque

$$p_g(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \}$.*
   (a) Calcolare la dimensione di $W = \ker(f) \cap U$.
   (b) Determinare un complemento di W in $\ker(f)$, esibendone una base.

Sol.: (a) Abbiamo che $\ker(f)$ è il piano $x_2 = 0$ e

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad \dim W = 1.$$

(b) Un complemento di W *in* $\ker(f)$ è dato da

$$U = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Infatti: $U \subset \ker(f)$ e $\ker(f) = U \oplus W$.

4. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) *Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di* F.
   (b) *Dire se è diagonalizzabile, motivando la risposta.*

Sol. : (a) Il polinomio caratteristico di F è dato da $p_\lambda = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$; di conseguenza gli autovalori sono $\lambda = 1, -1$, con molteplicità algebrica rispettivamente uguale a 2 e a 1. L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta $V_{-1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F è dato ad esempio da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
(b) L'applicazione non è diagonalizzabile poiché non esiste una base di $\mathbf{R}^3$, fatta da autovettori di F. Ogni insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di F contiene infatti solo due vettori.

5. *In* $\mathbf{R}^3$, *dotato dal solito prodotto scalare, consideriamo due vettori indipendenti* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *l'applicazione data da* $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}$.
   (a) *Dimostrare che* f *è lineare.*
   (b) *Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di* f.

Sol.: (a) Il prodotto scalare $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ è lineare in ognuna delle due variabili. Quindi

$$f(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = ((a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} - ((a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} = \ldots = a((\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}) + b((\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v})$$

$$= af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y}).$$

(b) Abbiamo che $\mathbf{x} \in \ker(f)$ se e solo se $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} = O$. Poiché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, deve valere $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}) = 0$. Dunque $\mathbf{x} \in \ker(f)$ se e solo se $\mathbf{x} \in \text{span}\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}^\perp$ e vale $\dim\ker(f) = 1$. Ne segue che $\dim Im(f) = 3 - 1 = 2$.

6. *Disegnare la conica del piano* $2X^2 + 4XY + 5Y^2 + 4X - 2Y - 4 = 0$.

Sol.: La matrice della forma quadratica associata $2X^2 + 4XY + 5Y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

con autovalori $\lambda = 6$ e $\lambda = 1$ e autospazi $V_6 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. In particolare, una base ortonormale di autovettori è data da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Col cambiamento di coordinate isometrico

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'/\sqrt{5} - 2y'/\sqrt{5} \\ 2x'/\sqrt{5} + y'/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

l'equazione della conica diventa

$$6(x')^2 + (y')^2 - 10/\sqrt{5}y' - 4 = 0.$$

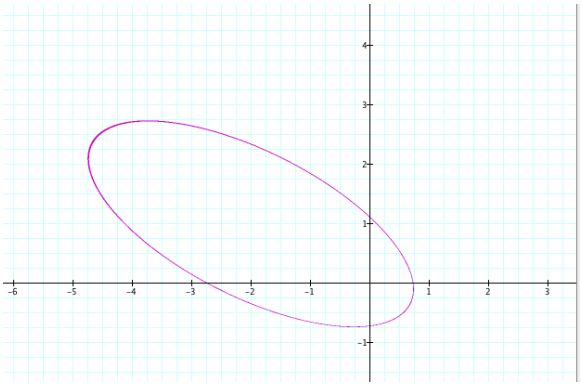
((x', y') sono le coordinate indotte dalla base ortonormale di autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$). Cerchiamo adesso una traslazione $\begin{cases} x' = x" \\ y' = y" + b \end{cases}$ in modo che nelle coordinate $x", y"$ l'equazione non abbia termini di grado 1. Troviamo $b = \sqrt{5}$ e l'equazione corrispondente è

$$6(x")^2 + (y")^2 - 9 = 0.$$

Abbiamo

$$X = T \circ R(X") \quad \Leftrightarrow \quad X" = R^{-1} \circ T^{-1}(X),$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{5} + 2y/\sqrt{5} - 2/5 \\ -2x/\sqrt{5} + y/\sqrt{5} - 1/5 \end{pmatrix},$$

da cui la figura.