COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V . Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $U = \text{span}\{\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{z}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$.

Sol.: Il quarto vettore è la somma del primo e del terzo, quindi la dimensione del sottospazio è minore di quattro. Consideriamo una combinazione lineare nulla dei primi tre vettori:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{z}) + c(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}(a + b) + c\mathbf{v} - b\mathbf{z} + (a - c)\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Dunque i primi tre vettori sono linearmente indipendenti e la dimensione del sottospazio U è 3.

2. Dati i sottospazi $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W = \left\{X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}\right\}$ in $\mathbf{R}^4$,

- (a) determinare la dimensione di $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.
 (b) Esibire una base di $U \cap W$.

Sol.: Abbiamo $\dim U = 2$. Inoltre $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, per cui $\dim W = 1$. Il primo generatore di U appartiene a W : dunque $U \cap W = W$ ed ha dimensione 1. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 1 - 1 = 2$.

3. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$. Sia $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ la proiezione ortogonale su U .
 (a) Determinare nucleo e immagine di f (esibirne una base).
 (b) Scrivere il polinomio caratteristico di f .

Sol.: $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. L'immagine di f è U , il nucleo è il complemento ortogonale di U , ossia

$$U^\perp = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Il polinomio caratteristico di f è $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$, con radici $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ entrambe di molteplicità algebrica e geometrica uguale a 2. Precisamente $V_0 = \ker(f) = U^\perp$ e $V_1 = U$.

4. Sia $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettori di autovalori 0, 3, -1, rispettivamente.
 (a) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, in dominio e codominio.
 (b) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base canonica, in dominio e codominio.

Sol.: (a) Dalla definizione di autovettore segue che $F(\mathbf{u}) = 0\mathbf{u}$, $F(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$ ad $F(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$. Dunque la matrice cercata è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

segue che la matrice cercata A è data da

$$A = C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} M C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} M C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1},$$

dove $C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare l'area del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$.

Sol.: Applichiamo al triangolo $\mathcal{T}$, di vertici P, Q, R , la traslazione di passo $T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, in modo da portare il vertice P nell'origine O , il vertice Q in $Q' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il vertice R in $R' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. La traslazione è un'isometria, per cui l'area del triangolo $\mathcal{T}$ è uguale a quella del triangolo $\mathcal{T}'$ di vertici O, Q', R' . Questa a sua volta è uguale a

$$\text{Area}(\mathcal{T}') = \frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}| = 4.$$

6. Sia data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esibire una base ortonormale di autovettori di A .

Fare un disegno approssimativo della quadrica

$$Q = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid {}^t X A X = 1\}.$$

Sol.: Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + 2)$, con radici $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. I rispettivi autospazi sono

$$V_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\sqrt{2}} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{-\sqrt{2}} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base ortonormale di autovettori di A si ottiene normalizzando i tre vettori qui sopra, che sono già ortogonali, ed è

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La quadrica è un cilindro iperbpolico: nelle coordinate X, Y, Z indotte da una base ortonormale di autovettori di A avrebbe equazione

$$\sqrt{2}Y^2 - \sqrt{2}Z^2 = 1.$$