1. Siano dati i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (i) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
 - (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
 - (iii) Calcolare le coordinate del vettore X nella base ortonormale così ottenuta.

2. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - (i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
 - (ii) A partire dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
 - (iii) Determinare una base per il complemento ortogonale di $U = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$ e una base per il complemento ortogonale di $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

3. Ortonormalizzare i vettori $\left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbf{R}^4$. Determinare il complemento ortogonale del sottospazio $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ in $\mathbf{R}^4$ esibendone una base.

4. Controllare se i vettori $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

5. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ il cui primo vettore sia $P/\|P\|$. In quanti modi si può fare?

6. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.
 - (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^4$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.
 - (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.
 - (c) Esibire due elementi di A che siano ortogonali fra loro. Posso trovarne tre? quattro?

7. Sia dato il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Determinare la distanza di P da W .
 - (b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
 - (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto scalare. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : V \rightarrow V$ mediante $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in V$.
- (i) Dimostrare che f è lineare.
 - (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
 - (iii) Determinare nucleo ed immagine di f .
 - (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f .
 - (v) Geometricamente cosa fa f ?
9. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia U un sottospazio di V . Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortogonale di U . Sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.
- (i) Far vedere che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
 - (ii) Far vedere che sono una base di V .