1. Per ogni matrice determinare gli autovalori dell'applicazione lineare corrispondente. Determinare gli autospazi.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
(b) Calcolare il polinomio caratteristico di $f$.
(c) Per ogni autovalore di $f$, determinare l'autospazio corrispondente.

3. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile $A$.
(a) Dimostrare che gli autovalori di $A$ sono non nulli.
(b) Dimostrare che se $\lambda$ è autovalore di $A$, allora $\lambda^{-1}$ è autovalore di $A^{-1}$.

4. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$.
(a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e che $f$ è lineare.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(c) Determinare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

5. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A^{1000}$.

6. Sia $A$ una matrice $n \times n$ che soddisfa $A^2 = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per $A$.
(a) Determinare gli autovalori di $f$.
(c) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
(d) Dimostrare che $\dim \ker(f) \geq n/2$.
(e) Dare un esempio di una matrice $A \neq 0$, per cui vale $A^2 = 0$.

7. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
(a) Calcolare $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
(b) Calcolare autovalori e autospazi di $f$.
(c) Se esiste l'applicazione inversa $f^{-1}$, determinarne il nucleo.

8. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare che ha i vettori $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ come autovettori di autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ rispettivamente.

(a) Determinare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(b) Determinare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

9. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$