1. Siano V e W gli spazi vettoriali dati da
$$V = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x+y+z=0\}, \qquad \text{e} \qquad W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x-y+2z=0\}.$$
Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è una base di V e che $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ è una base di W.
   Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare di matrice rappresentativa (rispetto alle basi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ uguale a
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Calcolare $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   (c) Determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione φ rispetto alla base $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ di V e la base $\mathbf{f}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{f}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F(X) = \mathbf{v} \times X$, dove $\times$ indica il prodotto vettoriale. Scrivere la matrice rappresentatiova di F.

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la proiezione ortogonale su $\mathbf{v}$.
   (a) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base canonica (in dominio e codominio).
   (b) Scrivere la matrice rappresentativa di F nella base $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (in dominio e codominio).

4. Siano dati i numeri complessi $z = 1+3i$ e $w = 2+i$. Determinare parte reale, parte immaginaria e modulo dei seguenti numeri complessi
$$z+2w, \quad z^{-1}, \quad zw, \quad 2z-(3w)^{-1}, \quad (zw)^{-1}, \quad z^3.$$

5. Siano dati i numeri complessi $z = \cos\theta + i\sin\theta$ e $w = 3(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Calcolare modulo e argomento dei numeri complessi
$$\bar{z}, \quad z^{-1}, \quad 2w, \quad zw, \quad z^2, \quad w^3.$$

6.(a) Verificare che l'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{R}^2, \ z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

(b) Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che corrisponde all'applicazione $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, \ z \mapsto az$, data dalla moltiplicazione di un numero complesso z per il numero complesso $a = \alpha + i\beta$.