1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

   (a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare

   (a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

   (c) $\det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$; (d) $\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $(\varphi \in \mathbf{R})$.

3. Siano

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
   (b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
   (c) Calcolare $\det(A+B)$.

4. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbf{R}^3.$$

   (a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
   (c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

5. Sia D la matrice 10×10

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & \cdots & 89 & 90 \\ 91 & 92 & \cdots & 99 & 100 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare il determinante di D.
   (b) Calcolare il rango di D.

6. Sia $f : \mathbf{R}^{10} \longrightarrow \mathbf{R}^{10}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice D dell'esercizio 5.
   (a) Determinare una base per l'immagine di f.
   (b) Determinare una base per il nucleo di f.

7. Scrivere le formule della rotazione di un angolo $\theta = \pi/3$, in senso antiorario, intorno al punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare i punti fissi di f, ossia $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$.
   (b) Dare un'interpretazione geometrica di f.

9. Sia $R_\theta\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la rotazione di un angolo θ, in senso antiorario, intorno all'origine.
   (a) Mostrare che $\|R_\theta \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.

10. Calcolare le formule della riflessione del piano rispetto alla retta di equazione $x - y = 1$.