1. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$, e siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base di V.
   (b) Sia $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Verificare che $\mathbf{w} \in V$ e determinare le coordinate di $\mathbf{w}$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. In altre parole, trovare $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2$.

2. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Esibire un terzo vettore in $\mathbf{R}^3$ tale che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

3. Quali applicazioni sono lineari?
   (a) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
   (b) $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da
$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$ per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da
$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \\ -x_2 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

5. Sia $W \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da dato da
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_4 & = & 0 \end{cases} \}.$$
   Esibire un secondo sottospazio $W' \subset \mathbf{R}^4$, tale che $W \cap W' = \{0\}$ e $W + W' = \mathbf{R}^4$.

6. Sia $\mathbf{R}[X]$ l'insieme dei polinomi nella variabile X.
   (a) Verificare che $\mathbf{R}[X]$ con la solita somma e la solita moltiplicazione per i numeri reali, è uno spazio vettoriale.
   (b) Dimostrare che la dimensione di $\mathbf{R}[X]$ è infinita.
   Sia $h : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $h(p) = \frac{dp}{dX}$ per $p \in \mathbf{R}[X]$.
   (c) Calcolare $h(X^n)$ per ogni $n \geq 0$.
   (d) Dimostrare che h è un'applicazione lineare e determinare $\ker(h)$ e $\mathrm{im}(h)$.