1. Calcolare la proiezione ortogonale del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sulla retta di equazione $x_1 - 3x_2 = 5$.

2. Calcolare la distanza fra il punto P e la retta r, dove

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}.$$

3. Calcolare l'area del triangolo T determinato dai vettori $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
   (c) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3'$ tale che $\mathbf{R}^3 \neq \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3'\}$.

5. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

   (a) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} \subset \mathbf{R}^5;$

   (b) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \} \subset \mathbf{R}^4;$

   (c) $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \} \subset \mathbf{R}^3;$

6. (a) Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 5.
   (b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali W dell'Esercizio 5.

7. Dimostrare che due vettori ortogonali in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.