1. Sia $X \in \mathbf{R}^5$ una soluzione del sistema lineare associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -88 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Calcolare la somma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ delle coordinate di X .

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinare tutti i vettori $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ per cui il sistema $AX = \mathbf{b}$ ammette soluzioni.

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$.

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < t < 1 \right\},$ (c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : |x - 2y + z| = 0 \right\},$ (d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}.$

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\},$$

e sia W' il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Determinare la dimensione di $W \cap W'$.

5. Sia C_1 la circonferenza di raggio $\sqrt{5}$ centrata in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e C_2 la circonferenza di equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0$$

- (a) Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno

- (b) Se l'intersezione consiste di due punti P_1 e P_2 scrivere l'equazione cartesiana della retta ℓ congiungente P_1 e P_2 e l'equazione parametrica della retta m perpendicolare ad ℓ e passante per il centro di C_1 .
- (c) Esiste una retta parallela a ℓ che sia tangente a C_1 ? in caso affermativo scriverne un'equazione.
- (d) Esiste una retta parallela a m che sia tangente a C_2 ? in caso affermativo scriverne un'equazione.
6. Sia C la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (a) Calcolare le tangenti a C uscenti dai punti $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (b) Sia $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, trovare il punto Q di C più vicino a P ; trovare il punto R di C più lontano da P .
- (c) Calcolare la distanza fra Q ed R .
7. Sia S la sfera di equazione $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$. Siano π il piano di equazione $x_1 = 1$ e π' quello di equazione $-2x_1 + x_3 + 1 = 0$.
- (a) Calcolare la distanza fra π e il centro di S e la distanza fra π' e il centro di S
- (b) Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio. Fare la stessa cosa per π' .
8. In $\mathbf{R}^3$ sia π il piano dato da $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ e siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (a) Calcolare un'equazione cartesiana del piano π_1 passante per $\mathbf{p}$ e parallelo a π .
- (b) Calcolare un'equazione parametrica della retta r passante per $\mathbf{q}$ e ortogonale π_1 .
- (c) Calcolare un'equazione parametrica della retta ℓ passante per $\mathbf{p}$ e ortogonale π .
- (d) Determinare $r \cap \ell$. Se $r \cap \ell = \emptyset$, calcolare la distanza $d(r, \ell)$.
9. Sia $\mathbf{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti reali, e sia $f: \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$ l'applicazione $f(p) = p'(x)$.
- (a) Mostrare che f è lineare.
- (b) Determinare nucleo e immagine di f .
- (c) Determinare la matrice rappresentativa di f nella base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$.

10. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vettori in $\mathbf{R}^3$.

(a) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

Sia $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$

(b) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (in dominio e codominio).

- (c) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
- (d) Calcolare la matrice rappresentativa di f^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
11. Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f \circ f = Id$ e sia λ un autovalore di f .
- (a) Mostrare che $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -1$.
- (b) Mostrare che f è necessariamente diagonalizzabile.
12. Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f^n = f \circ \dots \circ f = 0$ e sia λ un autovalore di f .
Mostrare che $\lambda = 0$.
13. Determinare due applicazioni lineari $f, g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ con gli stessi autovalori, che non sono coniugate.
14. Sia $F: S(n, n, \mathbf{R}) \times S(n, n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $F(A, B) = Traccia(AB)$, dove $S(n, n, \mathbf{R})$ indica le matrici simmetriche a coefficienti reali. Mostrare che F definisce un prodotto scalare su $S(n, n, \mathbf{R})$.
15. Mostrare che una matrice A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica.
16. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica;
- (a) $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
- (b) $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;
17. Disegnare le seguenti coniche:
- (a) $XY - 2X = 0$;
- (b) $X^2 + XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$;
- (c) $X^2 + 2XY + Y^2 - 2X + 2Y + 1 = 0$;
- (d) $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$;
- (e) $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$.
18. Dire di che tipo di quadrica in $\mathbf{R}^3$ si tratta
- (a) $X^2 = 0$;
- (b) $X^2 = 1$;
- (c) $X^2 = -1$;
- (d) $X^2 = Y$;
- (e) $XY + YZ = 0$;
- (f) $XY + YZ = 1$;
- (g) $XY + YZ = -1$;
- (h) $X^2 + Y^2 + Z = 0$;
- (i) $X^2 + Y^2 + Z^2 - X - Y - Z = 0$;