1. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica. Dire se sono diagonalizzabili o meno.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Siano $a, b, d \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica data da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
- (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in $\mathbf{R}$.
- (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ di autovettori di A .
3. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di autovettori di B .

4. Esibire due matrici con gli stessi autovalori, una diagonalizzabile e una no.
5. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano W . Calcolare la traccia di f .
6. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti reali. Dimostrare che

$$\text{rango}(A) + \text{rango}(B) \geq \text{rango}(A + B).$$

Dare un esempio per cui vale l'uguaglianza ed un esempio per cui vale la disuguaglianza stretta.

7. Determinare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$

8. Determinare quali delle seguenti matrici sono hermitiane o unitarie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

9. Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che la seguente matrice sia unitaria

$$\begin{pmatrix} a & i/2 & a(2i-1)/2 \\ ia & (1+i)/2 & a(1-i)/2 \\ a & -1/2 & a(2-i)/2 \end{pmatrix}.$$

10. Sia M una matrice reale quadrata 3×3 antisimmetrica, cioè tale che ${}^t M = -M$. Dimostrare che ha un autovalore nullo.