1. Risolvere il seguente sistema di quattro equazioni in tre incognite $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite $x, y, z, u \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y - 5z = 1. \end{cases}$$

3. Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ risolvere il sistema lineare associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array} \right).$$

4. Quali V sono spazi vettoriali?

(a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R},$$

(b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione “ $\oplus$ ” e moltiplicazione “ $\otimes$ ” definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; & \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^\lambda; & \text{per ogni } x \in V, \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

5. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (c) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2 \right\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (d) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2.$$

6. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore. Dimostrare che il sottoinsieme $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di V .

7. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.
- Dimostrare che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
 - Siano $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che se $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\lambda = 0$.

9. Dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$,
- disegnare i vettori $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A - B$, $A - 2B$, $A - 3B$;
 - disegnare tB , per $t \in [0, 1]$;
 - disegnare tC , per $t \in [-1, 0]$;
 - disegnare $A + tB$, per $t \in [0, 1]$;
 - disegnare $A + tB$, per $t \in \mathbf{R}$. Di che insieme si tratta?

10. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = -x_2 \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq 2 \right\};$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0 \right\} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 1 \right\};$$

- (ii) Dati $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

- (iii) Decidere quali di questi sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ coincidono:

$$A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbf{R} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}, \quad C = \left\{ -t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$$

$$D = \left\{ -t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}, \quad E = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$F = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

- (iv) Dati i vettori A , B , C dell'esercizio 1, calcolare:

$$\|A\|, \quad \|-B\|, \quad \|B\|, \quad \|C\|, \quad A \cdot C, \quad (A + B) \cdot B, \quad A \cdot B.$$

11. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot X_0 = 0\}$.

12. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $C = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \|X - X_0\| = 2\}$.