

## FUNZIONI BOOLEANE

## 1. FUNZIONI BOOLEANE

In questa sezione ci occuperemo principalmente delle *funzioni booleane*: data un'algebra di Boole  $B$  (finita o infinita), ed un numero naturale  $n$ , si considerano le funzioni in  $n$  variabili  $f : B^n \rightarrow B$ , dove  $B^n$  è il prodotto cartesiano di  $B$  per sé stessa  $n$  volte, cioè l'insieme delle  $n$ -uple di elementi di  $B$ . Esse possono essere viste come l'analogo, ad esempio, delle funzioni in  $n$  variabili reali a valori reali,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Le funzioni booleane possono essere composte mediante le operazioni dell'algebra di Boole  $B$ : in questo modo si ottiene una struttura di algebra di Boole sull'insieme di tali funzioni. Successivamente restringeremo la nostra attenzione alle funzioni booleane *polinomiali*.

**Notazione 1.1.** Nel seguito denoteremo un'algebra di Boole semplicemente con  $B$  (invece di  $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ ). L'algebra di Boole  $\{0, 1\}$  verrà denotata  $\mathbb{B}$ .

**Teorema/Definizione/Notazione 1.2.** Siano  $M$  un insieme e  $B$  un'algebra di Boole. Denotiamo  $B^M$  l'insieme di tutte le funzioni  $f : M \rightarrow B$ . Date due funzioni  $f, g \in B^M$ , definiamo le funzioni:

$$\begin{aligned} f \vee g, & \quad m \mapsto f(m) \vee g(m); \\ f \wedge g, & \quad m \mapsto f(m) \wedge g(m); \\ f', & \quad m \mapsto f(m)'; \\ f_0, & \quad m \mapsto 0; \\ f_1, & \quad m \mapsto 1. \end{aligned}$$

Risulta che  $B^M$ , munito di queste operazioni è un'algebra di Boole (la verifica degli assiomi è facile, e viene lasciata per esercizio).

**Caso particolare 1.3.** Se come insieme  $M$  si prende  $B^n = B \times \dots \times B$  ( $n$  volte) l'algebra di Boole delle funzioni  $B^{B^n}$  si denota  $F_n(B)$ . È l'algebra delle funzioni in  $n$  variabili in  $B$ , a valori in  $B$ .

**Esempio 1.4.**  $F_n(\mathbb{B})$  è l'algebra di Boole delle funzioni in  $n$  variabili a valori  $\{0, 1\}$ , dove ciascuna variabile può assumere solo i valori 0 e 1. Sappiamo già (prima parte del corso) che  $|F_n(\mathbb{B})| = 2^{|\{0, 1\}^n|} = 2^{2^n}$ .

Per esempio,  $F_2(\mathbb{B})$  è composta da sedici funzioni.

Le funzioni di  $F_n(\mathbb{B})$  possono anche essere espresse da una tabella. Ecco un esempio di un funzione di  $F_3(\mathbb{B})$ ,  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

(1)

**Definizione 1.5.** (*Polinomi booleani*) Sia  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  un insieme di  $n$  simboli (detti *indeterminate*). L'insieme  $P_n$  dei *Polinomi booleani nelle indeterminate*  $\{x_1, \dots, x_n\}$  è l'insieme definito ricorsivamente dai seguenti assiomi:

- $x_1, x_2, \dots, x_n, 1$  e  $0$  sono polinomi booleani;
- se  $p$  e  $q$  sono polinomi booleani, anche  $p \vee q, p \wedge q, p'$  lo sono.

**Esempio 1.6.**  $((x \vee y') \wedge (z \vee t))' \vee (z \wedge (t \vee x))'$  è un polinomio booleano nelle indeterminate  $x, y, z, t$ .

**Osservazione 1.7.** Per definizione, due polinomi sono uguali se e solo se i simboli che li definiscono lo sono. Ad esempio  $x \vee y$  e  $y \vee x$  sono due polinomi *diversi*. Altro esempio:  $(x')'$  e  $x$  sono due polinomi *diversi*.

L'osservazione precedente, ed i semplici esempi in essa contenuti, mostrano chiaramente che occorre distinguere tra *polinomi booleani* e le *funzioni* che essi definiscono. Ad esempio, i polinomi  $x \vee y$  e  $y \vee x$  sono diversi. Però, data un'algebra di Boole  $B$ , possiamo considerare le funzioni

$$f : B^2 \rightarrow B, \quad (x, y) \mapsto x \vee y \quad \text{e} \quad g : B^2 \rightarrow B, \quad (x, y) \mapsto y \vee x.$$

La proprietà commutativa nelle Algebre di Boole implica che  $f = g$ . Quindi *polinomi* diversi possono definire *funzioni* uguali. Per questo motivo introduciamo le seguenti definizioni.

**Teorema/Definizione/Notazione 1.8** (Funzioni polinomiali booleane). (a) Sia  $p$  un polinomio booleano in  $n$  indeterminate,  $p \in P_n$ . Sia  $B$  un'algebra di Boole. La *funzione polinomiale booleana indotta da  $p$  su  $B$*  è la funzione

$$\bar{p}_B : B^n \rightarrow B, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto p(x_1, \dots, x_n)$$

(b) Denotiamo

$$P_n(B) = \{\bar{p}_B \mid p \in P_n\}$$

l'insieme delle funzioni polinomiali booleane in  $n$  indeterminate su  $B$ .

Risulta che  $P_n(B)$  è una sottoalgebra di Boole dell'algebra di Boole  $F_n(B)$ .

*Proof.* La dimostrazione della proposizione contenuta in (b) è ovvia, perchè si vede facilmente che, date  $\bar{p}_B, \bar{q}_B \in P_n(B)$ ,  $\bar{p}_B \vee \bar{q}_B, \bar{p}_B \wedge \bar{q}_B, \bar{p}'_B$  stanno ancora in  $P_n(B)$  □

**Esempio 1.9.** Sia  $B = \{0, 1\}^3$ . Sia  $p = x \wedge y$ . La funzione  $\bar{p}_B : B^2 \rightarrow B$  è definita da:

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto (x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2, z_1 \wedge z_2).$$

Conclusione: per adesso abbiamo visto, tra gli altri, due concetti importanti:

- (1) *Polinomio booleano* (in  $n$  indeterminate). Essenzialmente un simbolo, ottenuto componendo in vario modo le indeterminate usando le operazioni  $\vee, \wedge, '$ , (oltre a  $0$  e  $1$ );
- (2) Data una qualsiasi algebra di Boole  $B$ , ogni polinomio booleano in  $n$  indeterminate induce una funzione in  $n$  variabili in  $B$ , detta *funzione polinomiale booleana*.

## 2. EQUIVALENZA DI POLINOMI BOOLEANI

Ovviamente noi siamo più interessati alle funzioni che ai polinomi. Dunque vogliamo definire una relazione di equivalenza che dichiari equivalenti due polinomi booleani se inducono la stessa funzione polinomiale. Detta così la definizione è ambigua, perchè non c'è un'unica funzione polinomiale indotta da un dato polinomio  $p$ : un polinomio  $p$  induce una funzione polinomiale  $\bar{p}_B$  su ogni algebra di Boole  $B$ . Quindi ce ne sono tante quante sono le algebre

di Boole<sup>1</sup>. Quindi dobbiamo scegliere un'algebra di Boole "di riferimento". Scegliamo la più semplice:  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ .

**Definizione 2.1.** Due polinomi booleani  $p$  e  $q$  nelle indeterminate  $x_1, \dots, x_n$  sono detti equivalenti ( $p \sim q$ ) se  $\bar{p}_{\mathbb{B}} = \bar{q}_{\mathbb{B}}$ . Questa relazione è evidentemente una relazione di equivalenza su  $P_n$ .

Il seguente teorema è importante: dice che se due polinomi inducono la stessa funzione a variabili in  $\mathbb{B}$  (cioè sono *equivalenti*) allora inducono la stessa funzione a variabili in una qualsiasi algebra di Boole  $B$ . Questo risultato non è difficile da indovinare se l'algebra di Boole  $B$  è finita, visto che sappiamo che in questo caso  $B$  è isomorfa a  $\{0, 1\}^n$ , ma è meno ovvio se l'algebra di Boole  $B$  è infinita.

**Teorema 1.** Sia  $B$  un'algebra di Boole, e siano  $p, q \in P_n$ . Se  $p \sim q$  allora  $\bar{p}_B = \bar{q}_B$ .

*Proof.* Usiamo il Teorema di Rappresentazione di Stone, a cui avevamo accennato alla fine del file precedente. Esso asserisce che, data un'algebra di Boole  $B$ , esiste un insieme  $M$  tale che  $B$  è una sottoalgebra di Boole di  $\mathcal{P}(M)$ . D'altra parte  $\mathcal{P}(M)$  è isomorfa, come Algebra di Boole, all'algebra di Boole delle funzioni da  $M$  a  $\mathbb{B}$  (vedi Definizione 1.2), che denotiamo  $\mathbb{B}^M$ . L'isomorfismo è dato esattamente come nel caso finito: dato un sottoinsieme  $C \subseteq M$ , definiamo la funzione "caratteristica" di  $C$ ,  $\chi_C : M \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $m \mapsto 1$  se  $m \in C$  e  $m \mapsto 0$  se  $m \notin C$ . La funzione

$$F : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{B}^M, \quad C \mapsto \chi_C$$

è un isomorfismo di Algebre di Boole (esercizio). Dunque, in definitiva,  $B$  è isomorfa a una sottoalgebra di  $\mathbb{B}^M$ , e quindi è sufficiente dimostrare il teorema per  $\mathbb{B}^M$ .

Ora supponiamo  $\bar{p}_{\mathbb{B}} = \bar{q}_{\mathbb{B}}$ , cioè  $p(i_1, \dots, i_n) = q(i_1, \dots, i_n)$  per ogni  $i, j \in \{0, 1\}$ .

Se  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{B}^M$ ,  $p(f_1, \dots, f_n)$  (risp.  $q(f_1, \dots, f_n)$ ) è la funzione da  $M$  a  $\mathbb{B}$  definita da:

$p(f_1, \dots, f_n)(x) = p(f_1(x), \dots, f_n(x))$  per ogni  $x \in M$  (risp.  $q(f_1, \dots, f_n)(x) = q(f_1(x), \dots, f_n(x))$ ).

Poichè  $f_i(x) \in \mathbb{B}$  per ogni  $x \in M$ ,  $p(f_1, \dots, f_n) = q(f_1, \dots, f_n)$ .  $\square$

Il teorema precedente è molto comodo, perchè asserisce che due polinomi in  $n$  indeterminate inducono la stessa funzione  $B^n \rightarrow B$  (una qualsiasi algebra di Boole, anche infinita) se e solo se inducono la stessa funzione  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ , dove  $\mathbb{B}$  è la più semplice algebra di Boole, cioè  $\{0, 1\}$ . Una funzione  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  è detta anche una *funzione di verità*, ed è descritta da una semplice tabella, come nell'esempio 1

**Esercizio 2.2.** Consideriamo i polinomi booleani  $p = p(x, y, z) = (x' \vee y' \vee z)' \vee (x \wedge y')$  e  $q = q(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z')$ . Domanda: data un'algebra di Boole  $B$ , è vero o no che  $p$  e  $q$  inducono la stessa funzione su  $B$ ? Il Teorema 1 ci dice che questo avviene se e solo se  $p$  e  $q$  inducono la stessa funzione di verità, cioè se e solo se hanno la stessa "tabella". A questo punto si devono semplicemente trovare la tabella di  $p$  e quella di  $q$  e verificare se sono uguali o no. Fatelo per una volta, anche se, nella prossima sezione vedremo che c'è un modo più breve – e meno soggetto ad errori di calcolo – di fare la stessa verifica.

<sup>1</sup>È un po' come, ad esempio, il polinomio  $p(x, y, z) = x + y + xyz$ . Tale polinomio induce una funzione da  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , oppure da  $\mathbf{Z}^3 \rightarrow \mathbf{Z}$ , oppure da  $\mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$ , oppure da  $\mathbf{Z}_n^3 \rightarrow \mathbf{Z}_n \dots$

## 3. FORMA NORMALE DISGIUNTIVA

Abbiamo visto che polinomi diversi possono corrispondere alla stessa funzione. Come capire rapidamente se ciò avviene oppure no? In questa sezione vedremo un modo per "normalizzare" i polinomi booleani, in modo che due polinomi sono equivalenti (cioè, per il Teorema 1, inducono la stessa funzione su ogni algebra di Boole) se e solo se hanno la stessa forma "normalizzata".

**Definizione 3.1** (Prodotti fondamentali). Date le indeterminate  $x_1, \dots, x_n$ , un prodotto fondamentale è un polinomio che coinvolge solo i simboli  $\wedge$  e  $'$  ed i cui ogni indeterminata appare al più una volta.

**Esempio 3.2.** Date le variabili  $x, y, z, t, w$ ,

$$x \wedge t' \wedge w, \quad x' \wedge y \wedge z \wedge t' \wedge w', \quad y, \quad z' \wedge t$$

sono prodotti fondamentali. Si noti che, ad esempio  $x \wedge x' \wedge z \wedge w'$  e  $x \wedge x \wedge z \wedge w'$  non sono prodotti fondamentali (l'indeterminata  $x$  appare più di una volta). Ovviamente, visto che  $x \wedge x' \sim 0$  e  $x \wedge x \sim x$ , essi sono equivalenti rispettivamente a 0 e  $x \wedge z \wedge w'$ .

**Definizione 3.3** (Somme di prodotti<sup>2</sup>). (a) Date le indeterminate  $x_1, \dots, x_n$ , una somma di prodotti è un polinomio della forma  $p_1 \vee \dots \vee p_k$ , dove  $p_i$  è un prodotto fondamentale per ogni  $i = 1, \dots, k$ . La somma di prodotti è detta irridondante se non vi è alcun prodotto che contiene un altro prodotto<sup>3</sup>.

(b) Una somma di prodotti completa è una somma di prodotti in cui appaiono solo prodotti in cui appaiono tutte le  $n$  indeterminate.

**Esempio 3.4.** Date le indeterminate  $x, y, z, t, w$ ,

(a) Il polinomio

$$(2) \quad (x \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge t' \wedge w') \vee y \vee (z' \wedge t)$$

è una somma di prodotti.

(b) Il polinomio

$$(3) \quad (x \wedge w) \vee (x' \wedge y \wedge z \wedge t' \wedge w') \vee y \vee (z' \wedge t) \vee (x \wedge t' \wedge w)$$

è una somma di prodotti non irridondante perchè il primo prodotto è contenuto nell'ultimo. Poichè, per l'assorbimento,  $(x \wedge t' \wedge w) \vee (x \wedge w)$  è equivalente a  $x \wedge w$ , il polinomio (3) è equivalente al polinomio (2).

(c)

$$(x' \wedge y \wedge z \wedge t' \wedge w') \vee (x \wedge y' \wedge z \wedge t' \wedge w') \vee (x \wedge y \wedge z' \wedge t \wedge w)$$

è una somma di prodotti completa.

Veniamo alla forma "normalizzata" di cui sopra. La seguente Proposizione dice che ogni polinomio  $p$  è equivalente ad una somma di prodotti completa, e che essa è unica a meno di cambiamento dell'ordine dei vari prodotti fondamentali. Applicando questo enunciato ad una somma di prodotti completa, questo enunciato ci dice che due somme di prodotti complete sono equivalenti se e solo se sono "uguali" (nel senso che hanno gli stessi prodotti fondamentali).

<sup>2</sup>Le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  si chiamano, in inglese, *join* e *meet*. Più propriamente, una somma di prodotti si dovrebbe chiamare un *join of meet*

<sup>3</sup>Ricordiamo che, se  $Q$  e  $P$  sono prodotti,  $(Q \wedge P) \vee Q \sim Q$ , per la legge di assorbimento. Quindi, se c'è un prodotto che contiene un altro prodotto, esso può essere "eliminato"

**Teorema/Definizione/Notazione 3.5** (Forma normale disgiuntiva). Per ogni polinomio  $p \in P_n$ , diverso da  $p = 0$ , esiste ed è unica (a meno di scambiare l'ordine dei prodotti fondamentali) una somma di prodotti completa equivalente a  $p$ , che si chiama *forma normale disgiuntiva* di  $p$ .

*Proof.* Osserviamo preliminarmente che  $\mathbb{B}^n$  è naturalmente in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei prodotti di lunghezza  $n$ . Ad esempio:  $\bar{x} = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$  corrisponde a  $x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6$ .

Sia ora  $p \in P_n$  un polinomio booleano in  $n$  indeterminate e consideriamo la funzione indotta  $p_{\mathbb{B}} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Consideriamo la somma di prodotti completa  $q$  in cui appaiono tutti e soli i prodotti corrispondenti alle  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1, \}^n$  tali che  $p((x_1, \dots, x_n)) = 1$ . Si vede subito, per verifica diretta, che  $p \sim q$ . Infatti, per costruzione,  $p(\bar{x}) = 1$  se e solo se  $q(\bar{x}) = 1$ .  $\square$

**Esempio 3.6.** Applichiamo la dimostrazione alla funzione  $f(x, y, z)$  definita dalla tabella (o funzione di verità) (1). La dimostrazione dice che tale funzione è equivalente a

$$p(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z)$$

Questo segue da verifica diretta: infatti  $f(x, y, z) = 1$  se e solo se  $(x, y, z) = (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ , e la stessa cosa vale per  $p(x, y, z)$ .

A proposito dell'esempio precedente, si noti che, a priori, non sapevamo nemmeno che  $f(x, y, z)$  fosse una funzione polinomiale. Adesso lo sappiamo, perchè una somma di prodotti è un polinomio. Ciò costituisce un'esemplificazione del seguente

**Corollario 3.7.** (a) Tutte le funzioni  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  sono polinomiali. In altre parole  $F_n(\mathbb{B}) = P_n(\mathbb{B})$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

(b)  $|P_n(\mathbb{B})| = 2^{2^n}$ .

*Proof.* (a) Segue dalla dimostrazione della Proposizione precedente: infatti, con lo stesso argomento, si vede che ogni funzione  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  è la funzione indotta da un'unica somma di prodotti (vedi l'esempio precedente).

(b) Segue immediatamente dal fatto che, come abbiamo visto nella prima parte del corso, l'insieme delle funzioni da  $\{0, 1\}^n$  a  $\{0, 1\}$  ha  $2^{2^n}$  elementi.  $\square$

**Osservazione/Esercizio 3.8.** Si vede subito che  $\mathbb{B}$  è l'unica Algebra di Boole  $B$  tale che  $F_n(B) = P_n(B)$ , cioè tale che tutte le funzioni a  $n$  variabili  $B^n \rightarrow B$  sono polinomiali. Ciò segue da questioni di numero: sappiamo che  $|F_n(B)| = |B|^{|B^n|} = |B|^{|B|^n}$ . D'altra parte, per il Teorema 1, sappiamo che le funzioni polinomiali  $P_n(B)$  sono tante quante le funzioni polinomiali  $P_n(\mathbb{B})$ , che, per il corollario precedente, sono  $2^{2^n}$ , quindi molte meno, a meno che  $B = \mathbb{B}$ . Esercizio: sia  $B = \{0, 1\}^2$ . Dare un'esempio di  $f \in F_2(B)$  non polinomiale (cioè una funzione  $f : B^2 \rightarrow B$  non polinomiale).

La forma normale disgiuntiva può essere trovata in due modi. Il primo, applicando direttamente la dimostrazione della Proposizione precedente: si trova la tabella e quindi la forma normale disgiuntiva.

Il secondo (certamente più breve, nel caso di molte indeterminate) consiste nel trovare dapprima una *somma di prodotti irridondante* (non completa) equivalente a  $p$ . A ciò si perviene applicando dapprima le leggi di De Morgan e l'involuntività per portare i complementi davanti alle singole indeterminate, e successivamente applicando la proprietà distributiva e le leggi di assorbimento. Una volta ottenuta una somma di prodotti equivalente, si arriva alla somma di prodotti *completa*, cioè la forma normale disgiuntiva, nel modo seguente: se vi è un prodotto fondamentale  $Q$  in cui, ad esempio, non appare l'indeterminata  $x$ , si ha che  $Q = Q \wedge 1 = Q \wedge (x \vee x') = (Q \wedge x) \vee (Q \wedge x')$ .

**Esempio 3.9.** Determinare la forma normale disgiuntiva di

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z)' \wedge ((x \vee z) \wedge (y' \vee z'))'.$$

Usando De Morgan e involutività abbiamo

$$(((x \wedge y)' \wedge z)' \wedge ((x \vee z) \wedge (y' \vee z')))' \sim ((x \wedge y) \vee z') \wedge ((x \vee z)' \vee (y' \vee z'))' \sim ((x \wedge y) \vee z') \wedge ((x' \wedge z') \vee (y \wedge z))$$

Usiamo ora la distributività, ottenendo che

$$p(x, y, z) \sim (x \wedge y \wedge x' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge z' \wedge z') \vee (y \wedge z \wedge z').$$

Ora usiamo le leggi di complemento ( $x \wedge x' = 0$ ), il fatto che  $x \wedge 0 = 0$ , il fatto che  $x \vee 0 = x$ , l'idempotenza ( $x \wedge x = x$ ) e la commutatività ( $x \wedge y = y \wedge x$  e  $x \vee y = y \vee x$ ), e arriviamo a

$$p(x, y, z) \sim (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge z')$$

Questa forma è irridondante. Per arrivare alla forma normale disgiuntiva, osserviamo che, poichè  $x \vee x' = 1$  e  $x \wedge 1 = x$ ,

$$p(x, y, z) \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z').$$

Questa è la forma normale disgiuntiva di  $p(x, y, z)$ .

**Esercizio 3.10.** Trovare la forma normale disgiuntiva dei seguenti polinomi:  $x \wedge (y' \wedge z)'$ ,  $(x' \vee y)' \vee (x \wedge y')$ ,  $y \wedge (x \vee (y \wedge z))'$ .

Nei seguenti esercizi <sup>4</sup> le operazioni  $x \vee y$  e  $x \wedge y$  sono denotate rispettivamente  $x + y$  e  $xy$ .

**Esercizio 3.11.** In un'algebra di Boole  $(A, \cdot, +, ')$  si consideri l'espressione  $E(x, y, z) = xy'z' + xx'y + x'z' + xyz' + x'y$ . Scrivere  $E$  sotto forma di somma di prodotti irridondante.

**Esercizio 3.12.** (a) Sia  $\mathbf{B}$  un'algebra di Boole. Per  $x$  ed  $y \in \mathbf{b}$  definiamo  $x \oplus y = xy' + x'y$ . Stabilire se vale o meno la seguente uguaglianza:  $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$ .

(b) In un'algebra di Boole si consideri l'operazione  $x \oplus y = x'y + xy'$ . Stabilire se le funzioni booleane  $F(x, y, z) = (xy) \oplus (z \oplus x')$  e  $E(x, y, z) = ((xy) \oplus z) \oplus x'$  sono uguali o no.

(c) In un'algebra di Boole  $(\mathcal{A}, +, \cdot, ')$ , si considerino le funzioni booleane seguenti:

$$E = (xyz + xy)[(x'y + yz)'xy']' \quad \text{ed} \quad F = xyz' + x'y + y'z' + x'yz + x'y'z.$$

Scrivere l'espressione booleana  $E$  in forma normale disgiuntiva (somma di prodotti); dedurne una forma normale disgiuntiva completa.

**Esercizio 3.13.** In un'algebra di Boole si consideri l'operazione  $x \oplus y := xy' + x'y$ .

Esprimere l'espressione booleana  $(xy) \oplus (z \oplus x')$  come somma di prodotti.

$$(xy) \oplus (z \oplus x') = (xy)(z \oplus x')' + (xy)'(z \oplus x')$$

$$\stackrel{DN}{=} (xy)(zx + z'x')' + (xy)'(zx + z'x')$$

$$\stackrel{DM}{=} (xy)(zx)'(z'x')' + (x' + y')(zx + z'x')$$

$$\stackrel{DM+DN}{=} (xy)(z' + x')(z + x) + (x' + y')(zx + z'x')$$

<sup>4</sup>tratti da esercizi d'esame di cui avevo la source, ma ripeto la raccomandazione di cercare di fare tutti, o almeno quanti più possibile, gli esercizi degli esami degli anni passati, visto che questi sono stati scelti per un motivo abbastanza casuale

$$\stackrel{D}{=} xyz'z + xyz'x + xyx'z + xyx'x + x'zx + x'z'x' + y'zx + y'z'x'$$

$$\stackrel{C+Co+I}{=} xy0 + xyz' + 0yz + 0xy + 0z + x'z' + xy'z + x'y'z'$$

$$\stackrel{L}{=} xyz' + x'z' + xy'z + x'y'z' \stackrel{A}{=} xyz' + x'z' + xy'z.$$

(dove: DN=doppia negazione, DM=De Morgan, D=distributività, C=commutatività, Co=complemento, I=idempotenza, L= limitatezza, A=assorbimento).

( Alternativamente, si può pervenire al risultato trovando esplicitamente la “tabella di verità” dell’espressione, pervenendo direttamente alla espressione in somma di prodotti completata:  $xyz' + x'yz' + x'y'z' + xy'z$ .)

**Esercizio 3.14.** Esprimere come somma di prodotti l’espressione booleana  $E(x, y, z, t, w) = ((x + y)'zw' + (z't)xy'w)'$ .

Usando le identità di de Morgan e la distributività fra le operazioni  $\cdot$  e  $+$  dell’algebra, troviamo

$$\begin{aligned} ((x + y)'zw' + (z't)xy'w)' &= ((x + y)'zw')' \cdot ((z't)xy'w)' = \\ &= (x'yzw')' \cdot ((z + t)xy'w)' = (x'yzw')' \cdot (zxy'w + txy'w)' = \\ &= (x'yzw')' \cdot (zxy'w)' \cdot (txy'w)' = (x + y' + z' + w) \cdot (z' + x' + y + w') \cdot (t + x' + y + w') = \\ &= xz't + xz'y + \dots \end{aligned}$$

**Esercizio 3.15.** Sia  $\mathcal{B}$  un’algebra di Boole. Per  $x, y \in \mathcal{B}$  definiamo  $x \oplus y = xy' + x'y$ . Dimostrare la seguente uguaglianza o darne un controesempio:  $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (z \oplus x)$ .

Dalla definizione di  $\oplus$  troviamo:

$$E: \quad x \oplus (y + z) = x(y + z)' + x'(y + z) = xy'z' + x'y + x'z$$

$$F: \quad (x \oplus y) + (z \oplus x) = xy' + x'y + xz' + x'z$$

Un modo per determinare se le espressioni booleane  $E$  ed  $F$  coincidono o meno è quello di scriverle come somma di prodotti completa (tale scrittura infatti è unica). Nel nostro caso, troviamo

$$E = xy'z' + x'y + x'y'z' + x'y'z + x'y'z = xy'z' + x'y + x'y'z' + x'y'z$$

$$F = xy'z + xy'z' + x'y + x'y'z' + xy'z' + xy'z' + x'y + x'y'z = xy'z + xy'z' + x'y + x'y'z' + xy'z' + x'y'z,$$

Da cui risulta che  $E \neq F$ . *Alternativamente:* Per  $x = 1, y = 0, z = 1$ , troviamo  $E(1, 0, 1) = 0 \neq F(1, 0, 1) = 1$ . Da cui risulta che  $E \neq F$ . *Alternativamente:* Scrivere la tavola di verità di  $E$  ed  $F$ .

**Esercizio 3.16.** In un’algebra di Boole si consideri l’operazione  $x \oplus y = x'y + xy'$ . Stabilire se le funzioni booleane  $F(x, y, z) = (xz) \oplus (y \oplus x')$  e  $E(x, y, z) = ((xz) \oplus y) \oplus x'$  sono uguali o no.

*Soluzione.* Scriviamo  $F(x, y, z)$  come some di prodotti. Si ha  $F(x, y, z) = (xz)'(y \oplus x') + (xz)(y \oplus x')' = (xz)'(yx + y'x') + xz(yx + y'x')' = (x' + z')(yx + y'x') + xz((x' + y')(x + y)) = x'y' + xyz' + x'y'z' + x'y'z = x'y' + xyz' + xy'z$ .

Scrivendo  $E(x, y, z)$  come somma di prodotti, facendo passaggi analoghi al punto (b), risulta  $E(x, y, z) = .. = x'y' + xyz' + xy'z$ . Dunque  $E(x, y, z) = F(x, y, z)$ .