1. Sia $\mathbf{Z}_8$ l'insieme delle classi resto modulo 8.
   (a) Scrivere la tabella dell'addizione e della moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8$.
   (b) Determinare $\mathbf{Z}_8^*$, il sottoinsieme degli elementi invertibili rispetto alla moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8$.
   (c) Scrivere la tabella della moltiplicazione in $\mathbf{Z}_8^*$.
   (d) Determinare le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{x}^2 \equiv \overline{0}$.
   (e) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $4x \equiv 0 \pmod 8$ e le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{4}\overline{x} \equiv \overline{0}$.
   (f) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $2x \equiv 6 \pmod 8$ e le soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ dell'equazione $\overline{2}\overline{x} \equiv \overline{6}$.
   (g) Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $3x \equiv 1 \pmod 8$. Quante soluzioni in $\mathbf{Z}_8$ ha l'equazione $\overline{3}\overline{x} \equiv \overline{1}$?

2. Enunciare il Piccolo Teorema di Fermat per $G = \mathbf{Z}_{13}^*$. Usare tale risultato per calcolare

$$\overline{4^{24}}, \quad \overline{4^{59}}, \quad \overline{4^{26}}, \quad \overline{4^{24001}} \quad \in \mathbf{Z}_{13}.$$

3. Siano $(G_1, e_1, \circ)$ e $(G_2, e_2, *)$ due gruppi. Sul prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$ definiamo una operazione mediante
$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 \circ h_1, g_2 * h_2).$$
   (a) Dimostare che con questa operazione $G_1 \times G_2$ è un gruppo.
   (b) Verificare che $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ con la somma definita da
$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (\bar{y}_1, \bar{y}_2) := (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2), \quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2),\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$$
   è un gruppo abeliano. Calcolarne la tabella.
   (c) Verificare che $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ con la somma definita da
$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (\bar{y}_1, \bar{y}_2) := (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2), \quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2),\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$$
   è un gruppo abeliano. Calcolarne la tabella.

4. Sia G un gruppo tale che $g^2 = e$, per ogni $g \in G$. Dimostrare che G è abeliano.

5. Sia $G = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R},\ \det M \neq 0\}$. Dimostrare che G col prodotto fra matrici usuale è un gruppo non commutativo.

6. Sia $A = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$.
   (a) Dimostrare che A con la somma fra matrici usuale è un gruppo abeliano.
   (b) Dimostrare che A con la somma e il prodotto fra matrici usuali è un anello non commutativo.
   (c) Far vedere che esistono matrici non nulle $M, N \in A$ il cui prodotto è la matrice nulla.
   (d) Chi sono le unità (ossia gli elementi che hanno inverso moltiplicativo) in A?