COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Dimostrare per induzione che* $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$, *per ogni numero naturale* $n\ge 1$.

Per $n=1$, l'enunciato è $P(1):\quad 1\le 1$, ed è vero.
Facciamo vedere che dall'enunciato ennesimo $P(n):\quad 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$, segue l'enunciato $(n+1)$-simo $P(n+1):\quad 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}\le 2-\frac{1}{n+1}$. Se $P(n)$ è vero, abbiamo intanto la stima

$$1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\le 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Se facciamo vedere che

$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\le 2-\frac{1}{n+1}, \tag{$*$}$$

abbiamo dimostrato l'enunciato $P(n+1)$. La disequazione (*) è equivalente a

$$-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\le -\frac{1}{n+1}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{(n+1)^2}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

che è soddisfatta per ogni numero naturale $n\ge 1$. la dimostrazione è completa.

2. *Sia* $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ *l'insieme dei numeri naturali e sia* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *l'insieme delle parti di* $\mathbb{N}$. *Determinare un'applicazione iniettiva* $F\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Per definizione, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})=\{\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\ldots,\{1,2\},\{1,3\},\ldots\};$$

in particolare ha fra i suoi elementi tutti i sottoinsiemi della forma $\{n\}$, che consistono nel numero naturale n.
L'applicazione

$$F\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{N}),\quad n\mapsto\{n\}$$

è un'applicazione con le proprietà richieste.

3. *Sia* X *un insieme e sia* $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme della parti di* X. *Si definisca la seguente relazione sull'insieme* $\mathcal{P}(X)$: *dati due sottoinsiemi* $A,B\subset X$, *si ha che* $A\,\mathbf{R}\,B$ *se e solo se* $A\cap B\neq\emptyset$. *Determinare se* $\mathbf{R}$ *è: (a) riflessiva, (b) simmetrica, (c) antisimmetrica, (d) transitiva.*

(a) La relazione non è riflessiva: per $A=\emptyset$ non vale $A\mathbf{R}A$. (invece, per ogni $A\neq\emptyset$ vale $A\mathbf{R}A$ in quanto $A\cap A=A\neq\emptyset$).
(b) La relazione è simmetrica: $A\mathbf{R}B$ implica $B\mathbf{R}A$, in quanto $A\cap B=B\cap A$ e dunque $A\cap B\neq\emptyset$ implica $B\cap A\neq\emptyset$.
(c) La relazione non è antisimmetrica: $A\mathbf{R}B$ e $B\mathbf{R}A$ non implica $A=B$, in quanto $A\cap B\neq\emptyset$ non implica $A=B$.
(d) La relazione non è transitiva: $A\mathbf{R}B$ e $B\mathbf{R}C$ non implica $A\mathbf{R}C$. In generale esistono infatti insiemi A,B,C con $A\cap B\neq\emptyset$, $B\cap C\neq\emptyset$, ma con $A\cap C=\emptyset$. (ad esempio $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{3,4\}$).

(Nel caso in cui X ha un elemento solo, la relazione è sia antisimmetrica che transitiva).

4. *Sull'insieme* $X=\{2,3,4,6,24,72,48\}$, *considerare la relazione d'ordine "* $\le$" *così definita:* $a\le b$ *quando* a *divide* b.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.

(b) *Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.*
(c) *Determinare i maggioranti di* $\{4,6,24\}$ *e, se esiste,* $\sup(\{4,6,24\})$.
(d) *Determinare i minoranti di* $\{4,6,24\}$ *e, se esiste,* $\inf(\{4,6,24\})$.

(a) In X, ci sono due elementi massimali (48 e 72) e due elementi minimali (2 e 3).
(b) Non ci sono né massimo né minimo assoluto in X.
(c) Ci sono tre maggioranti di $\{4,6,24\}$, e sono dati da 48, 72 e 24; il sup. è 24 che è anche il massimo di $\{4,6,24\}$
(d) C'è un minorante per $\{4,6,24\}$, dato da 2, ed è anche un inf., ma non un minimo.

5. *Sia* $\mathbb{Z}_{91}$ *l'anello delle classi resto (o classi di congruenza) modulo* 91 *e sia* $\mathbb{Z}_{91}^*$ *il sottoinsieme delle classi che ammettono inverso moltiplicativo. Determinare se* $\overline{7}$ *e* $\overline{8}$ *appartengono a* $\mathbb{Z}_{91}^*$*; in caso affermativo, calcolarne l'inverso in* $\mathbb{Z}_{91}$.

Poiché $91 = 7 \times 13$ e $mcd(7,91) = 13 \neq 1$, la classe resto $\overline{7}$ non ammette inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}_{91}$ e dunque non appartiene a $\mathbb{Z}_{91}^*$. Si ha invece $mcd(8,91) = 1$, e quindi $\overline{8} \in \mathbb{Z}_{91}^*$. Per calcolare l'inverso di $\overline{8}$, dobbiamo determinare un $x \in \mathbb{Z}$ tale che

$$8x + N91 = 1, \quad \text{per qualche } N \in \mathbb{Z}.$$

Tali interi x, N esistono perché $mcd(8,91) = 1$ e si possono calcolare con l'algoritmo euclideo:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 91 + 0 \cdot 8 &= 91 \\
0 \cdot 91 + 1 \cdot 8 &= 8 \\
1 \cdot 91 + (-11) \cdot 8 &= 3, \quad 91 = 8 \cdot 11 + 3 \\
(-2) \cdot 91 + 23 \cdot 8 &= 2, \quad 8 = 3 \cdot 2 + 2 \\
3 \cdot 91 + (-34) \cdot 8 &= 1, \quad 3 = 2 \cdot 1 + 1.
\end{aligned}$$

Dal calcolo troviamo $x = -34$, per cui l'inverso cercato è

$$\overline{8}^{-1} = \overline{x} = \overline{57} \in \mathbb{Z}_{91}^*.$$

6. *(a) Calcolare il resto della divisione per* 3 *e il resto della divisione per* 5 *del numero* 8^{13}.
(b) *Calcolare il resto della divisione per* 15 *di* 8^{13}.

(a) Calcolare il resto della divisione per 3 del numero 8^{13} equivale a calcolare

$$\overline{8^{13}} \equiv \overline{8}^{13} \equiv \overline{2}^{13} \quad \text{in } \mathbb{Z}_3.$$

Osserviamo che $mcd(2,3) = 1$ e dunque $\overline{2} \in \mathbb{Z}_3^*$. Poiché $\mathbb{Z}_3^*$ è un gruppo (moltipicativo) di cardinalità 2, per il teorema di Lagrange (o Piccolo Teorema di Fermat, visto che 3 è primo) si ha che $\overline{2}^2 \equiv \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_3^*$. Scrivendo $13 = 2 \cdot 6 + 1$, troviamo

$$\overline{8^{13}} \equiv \overline{2}^{13} \equiv \overline{2}^{12}\overline{2} \equiv \overline{2} \quad \text{in } \mathbb{Z}_3.$$

(in questo caso semplice si vedeva anche direttamente che $\overline{2} \cdot \overline{2} \equiv \overline{1}$, in $\mathbb{Z}_3$, etc...). Analogamente, calcolare il resto della divisione per 5 del numero 8^{13} equivale a calcolare

$$\overline{8^{13}} \equiv \overline{8}^{13} \equiv \overline{3}^{13} \quad \text{in } \mathbb{Z}_5.$$

Anche in questo caso, osserviamo che $mcd(3,5) = 1$ e dunque $\overline{3} \in \mathbb{Z}_5^*$. Il gruppo $\mathbb{Z}_5^*$ ha cardinalità 4 e, scrivendo $13 = 4 \cdot 3 + 1$, troviamo

$$\overline{8^{13}} \equiv \overline{3}^{13} \equiv \overline{3}^{12}\overline{3} \equiv \overline{3} \quad \text{in } \mathbb{Z}_5.$$

(b) Per calcolare il resto della divisione per 15 di 8^{13}, ricordiamo che per il Teorema Cinese del Resto il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

ha soluzioni in $\mathbb{Z}$ e le soluzioni sono della forma $x = x_0 + n15$, dove x_0 è una soluzione particolare del sistema ed $n \in \mathbb{Z}$. Questo significa che

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv x_0 \mod 15,$$

e $\overline{x} = \overline{x_0} \in \mathbb{Z}_{15}$ ci dà esattamente il resto cercato. Nel nostro caso, risolvendo il sistema per sostituzione, troviamo

$$x = 8 + 15n,\ n \in \mathbb{Z}, \qquad \overline{x} = \overline{8}.$$

Dunque il resto cercato è 8.