COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Boole. Per $x, y \in \mathcal{B}$ definiamo $x \oplus y = xy' + x'y$. Dimostrare la seguente uguaglianza o darne un controesempio: $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (z \oplus x)$.*

Dalla definizione di $\oplus$ troviamo:

$$E: \quad x \oplus (y+z) = x(y+z)' + x'(y+z) = xy'z' + x'y + x'z$$

$$F: \quad (x \oplus y) + (z \oplus x) = xy' + x'y + xz' + x'z$$

Un modo per determinare se le espressioni booleane E ed F coincidono o meno è quello di scriverle come somma di prodotti completa (tale scrittura infatti è unica). Nel nostro caso, troviamo

$$E = xy'z' + x'yz + x'yz' + x'yz + x'y'z = xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z$$

$$F = xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z = xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + xyz' + x'y'z,$$

Da cui risulta che $E \neq F$.

Alternativamente: Per $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, troviamo $E(1,0,1) = 0 \neq F(1,0,1) = 1$. Da cui risulta che $E \neq F$.

Alternativamente: Scrivere la tavola di verità di E ed F.

Alternativamente: Scrivere E ed F come somma di tutti gli implicanti primi (anche questa scrittura è unica), usando ad esempio il metodo del consenso.

2. *Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei numeri interi che divisi per 11 danno resto 1 e che divisi per 13 danno resto 5.*
   (a) Determinare $\mathcal{S}$.
   (b) Determinare tutti gli elementi $n \in \mathcal{S}$ tali che $0 \leq n \leq 99$.

(a) L'insieme $\mathcal{S}$ è formato dai numeri interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfano il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 11 \\ x \equiv 5 \mod 13. \end{cases}$$

Osserviamo che il sistema è compatibile e che la soluzione generale è della forma

$$x = x_0 + K143, \quad K \in \mathbb{Z}, \quad 143 = 11 \cdot 13,$$

dove x_0 è una qualunque soluzione particolare del sistema. Dunque resta da calcolare una soluzione particolare x_0.

Le soluzioni della prima congruenza sono date da

$$x = 1 + k11, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Sostituendo queste soluzioni nella seconda congruenza del sistema, troviamo la congruenza in k

$$11k \equiv 4 \mod 13. \qquad (**)$$

Una soluzione particolare della (**) sostituita in (*) dà una soluzione particolare del sistema. Determiniamo innanzitutto due interi $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $11n + 13m = 1$. Mediante l'agoritmo euclideo, troviamo ad esempio $n = 6, m = -5$. Dopodiché $N = 24, M = -20$ soddisfano $11N + 13M = 4$. La corrispondente soluzione particolare della (**) è data da $k_0 = 24$ che sostituita nella (*) ci dà $x_0 = 265$.

(b) In questo caso non ci sono elementi $n \in \mathcal{S}$ tali che $0 \leq n \leq 99$.

3. *Sia $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione ricorsiva definita da $F(1) = 1$, $F(n) = n + F(n-1)$, per $n \geq 1$.*
   (a) Calcolare $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$.
   (b) Dimostrare per induzione che $F(n) = \frac{n^2+n}{2}$.

(a) $F(1) = 1$, $F(2) = 2 + F(1) = 3$, $F(3) = 3 + F(2) = 6$, $F(4) = 4 + F(3) = 10$.
(b) $P(1): \quad F(1) = \frac{1^2+1}{2}$ (vera).
Ipotesi induttiva:

$$P(n): \quad F(n) = \frac{n^2+n}{2}.$$

Tesi:

$$P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1): \quad F(n+1) = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Per definizione $F(n+1) = n + 1 + F(n)$. Per ipotesi induttiva $F(n) = \frac{n^2+n}{2}$. Da cui

$$F(n+1) = n + 1 + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2},$$

come richiesto.

4. *Considerare l'enunciato $P(x): \quad \forall x \in]2,5[\quad (x^2-4x+3>0) \wedge (x-1>0) \bigvee (x^2-4x+3<0) \wedge (x<0)$.*
   (a) Determinare se $P(x)$ è vero.
   (b) Determinare $\neg P(x)$, ossia la negazione di $P(x)$ (non ci devono essere negazioni davanti ad un quantificatore o davanti a un'espressione che comprenda connettivi logici).

(a) Poiché $x^2 - 4x + 3 < 0$, per $x \in]1,3[$, mentre $x^2 - 4x + 3 > 0$, per $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, l'enunciato $P(x)$ è falso. Ad esempio non è verificato per nessun x maggiore di 2 e minore di 3.
(b)

$$\neg P(x): \quad \neg(\forall x \in]2,5[\quad (x^2-4x+3>0) \wedge (x-1>0) \bigvee (x^2-4x+3<0) \wedge (x<0)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in]2,5[\quad \neg((x^2-4x+3>0) \wedge (x-1>0) \bigvee (x^2-4x+3<0) \wedge (x<0)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in]2,5[\quad \neg((x^2-4x+3>0) \wedge (x-1>0)) \bigwedge \neg((x^2-4x+3<0) \wedge (x<0)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in]2,5[\quad (x^2-4x+3<0) \vee (x-1<0) \bigwedge (x^2-4x+3>0) \vee (x>0).$$

5. *Sia $x = 29$. Calcolare la classe resto*

$$\overline{x^{123}} \quad \text{in} \quad \mathbb{Z}_{11}.$$

Innanzitutto

$$\overline{29^{123}} = \overline{7^{123}} = \bar{7}^{123} \quad \text{in} \quad \mathbb{Z}_{11}.$$

Inoltre, poiché 11 è primo, il gruppo delle unità $\mathbb{Z}_{11}^*$ consiste di tutte le classi resto non nulle $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{11}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ ed ha cardinalità 10. Per il teorema di Lagrange, $\bar{x}^{10} = \bar{1}$, per ogni $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{11}^*$. In particolare,

$$\bar{7}^{10} = \bar{1}, \quad \bar{7}^{123} = \bar{7}^{10 \cdot 12}\, \bar{7}^3 = \bar{7}^3 = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{11}.$$

6. *Sia $\mathcal{S} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq m \leq 7\}$. Si definisca su $\mathcal{S}$ il seguente ordinamento parziale:*

"$m_1 \leq m_2$ se e solo se ogni cifra dell'espansione binaria di m_1 è minore o uguale della corrispondente cifra dell'espansione binaria di m_2".

(i) Verificare che $2 \leq 7$ e che $2 \not\leq 5$.

(ii) Disegnare il diagramma di Hasse di $(\mathcal{S}, \leq)$.

(iii) Determinare gli elementi massimali e minimali di $(\mathcal{S}, \leq)$.

(iv) Determinare eventuali $\sup, \inf, \max, \min$ *del sottoinsieme* $\{2,4,6\} \subset (\mathcal{S}, \leq)$.

Le espansioni binarie dei numeri fra 2 e 7 sono date rispettivamente da

$$2 = 10, \quad 3 = 11, \quad 4 = 100, \quad 5 = 101, \quad 6 = 110, \quad 7 = 111.$$

(i) Poiché $0 \leq 1$ e $1 \leq 1$ (nel senso usuale), si ha che $2 \leq 7$ (secondo l'ordinanento appena definito).
Invece, poiché $0 \leq 1, \quad 1 \not\leq 0$, e $\; 0 \leq 1$ (nel senso usuale),si ha che $2 \not\leq 5$ (secondo l'ordinanento appena definito).

(ii),(iii) Si ha

$$4 \leq 6 \leq 7, \quad 4 \leq 5 \leq 7, \quad 2 \leq 6 \leq 7, \quad 2 \leq 3 \leq 7,$$

$2, 4$ non confrontabili, $5, 6, 3$ non confrontabili.
Cè un massimo: 7, ci sono due elementi minimali: $2, 4$.

(iv) Il sottoinsieme $\{2,4,6\}$ ha massimo uguale 6, non ha inf.