COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. Considerare la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da "$m\mathbf{R}n$ se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $m + n = 4k$". Determinare se $\mathbf{R}$ è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva.*

$\mathbf{R}$ non è riflessiva: solo i numeri pari sono in relazione con se stessi. Infatti $m\mathbf{R}m$ implica che esiste $k \in \mathbb{Z}$ con $2m = 4k$, ossia $m = 2k$. Dunque m deve essere pari.
$\mathbf{R}$ è simmetrica: $m\mathbf{R}n$ implica $n\mathbf{R}m$. Infatti se esiste $k \in \mathbb{Z}$ con $m + n = 4k$, anche $n + m = 4k$, per lo stesso intero $k \in \mathbb{Z}$.
$\mathbf{R}$ non è antisimmetrica: $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}m$ non implica $m = n$. Infatti, due qualunque multipli distinti di 4, ad esempio $m = 4$ ed $n = 12$, soddisfano $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}m$.
$\mathbf{R}$ non è transitiva: $m\mathbf{R}n$ ed $n\mathbf{R}p$ non implica $m\mathbf{R}p$. Infatti, per $m = 3$, $n = 1$, $p = 3$, troviamo $m + n = 3 + 1 = 4$, $n + p = 1 + 3 = 4$, ma $m + p = 3 + 3 = 6$ non è un multiplo di 4.

2. *Dimostrare per induzione che $n^3 + 5n$ è divisibile per 6, per ogni numero naturale $n \geq 1$.*

Per $n = 1$ abbiamo $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$. Dunque $P(1)$ è vera.
Facciamo vedere che $P(n) \to P(n+1)$:
assumendo $n^3 + 5n$ divisibile per 6, anche $(n+1)^3 + 5(n+1)$ risulta divisibile per 6. Scriviamo

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6$$

e osserviamo che, poiché $n(n+1)$ è sempre divisibile per due (uno fra n ed $n+1$ è pari), $3n(n+1)$ è sempre divisibile per 6. Ne segue che $n^3 + 5n$ divisibile per 6 implica $(n+1)^3 + 5(n+1)$ divisibile per 6, come richiesto.

3. *Siano dati gli insiemi*

$$X = \{6, 7, 8, 9, 10\}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{P}(Y).$$

   (a) Stabilire quali fra questi insiemi hanno la stessa cardinalità (motivando bene le risposte).
   (b) Esibire un'applicazione suriettiva ϕ: $\mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità (esiste un'applicazione biiettiva da uno all'altro) se e solo se hanno lo stesso numero di elementi:
nel nostro caso troviamo che X e Y hanno la stessa cardinalità $|X| = |Y| = 5$;
i rispettivi insiemi delle parti hanno la stessa cardinalità $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)| = 2^5 = 32$;
Per ogni insieme A, finito o infinito, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità superiore a quella di A. Poiché gli insiemi infiniti $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità (numerabile), segue che $\mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ non hanno la stessa cardinalità.

4. *Determinare tutti gli $x \in \mathbb{Z}$ tali che*
$$\begin{cases} 3x \equiv 6 & \textit{mod 12} \\ x \equiv 4 & \textit{mod 15.} \end{cases}$$

La prima congruenza del sistema è equivalente alla congruenza $x \equiv 2 \bmod 4$, ed il sistema è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x \equiv 2 & \text{mod } 4 \\ x \equiv 4 & \text{mod } 15. \end{cases}$$

Poiché $mcd(4,15)=1$, il Teorema Cinese del Resto ci assicura che il sistema ammette soluzioni. Ci dice inoltre che tali soluzioni sono della forma $x=x_0+n60$, al variare di $n\in\mathbb{Z}$.

Calcolo delle soluzioni (per sostituzione):
le soluzioni della prima congruenza del sistema sono date da $x=2+4k$, al variare di $k\in\mathbb{Z}$. Sostituendo tali soluzioni nella seconda congruenza, troviamo la congruenza in k

$$4k\equiv 2 \bmod 15.$$

Poiché $mcd(4,15)=1$ divide 15, questa congruenza (e il sistema di congruenze originale) ammette soluzioni. Per determinarle, calcoliamo innanzitutto $N,M\in\mathbb{Z}$ tali che $4N+15M=1=mcd(4,15)$: ad esempio $N=4$ ed $M=-1$. (In questo caso N,M si vedono ad occhio; altrimenti si può usare l'algoritmo euclideo). Ne segue che $k=8$ è una soluzione particolare della congruenza $4k\equiv 2 \bmod 15$, la cui soluzione generale è data da $k=8+n15$, al variare di $n\in\mathbb{Z}$. Sostituendo i valori di k trovati nella soluzione generale della prima congruenza, troviamo la soluzione generale del sistema:

$$x=2+4(8+n15)=34+60n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

5. *Per $n\in\mathbb{N}$, indichiamo con $\mathbf{D}_n=\{m\in\mathbb{N}\mid m \text{ divide } n\}$ il reticolo dei divisori di n con le operazioni di massimo comun divisore e di minimo comune multiplo. Si considerino i seguenti reticoli:*

$$\mathbf{D}_{30},\quad \mathbf{D}_{24},\quad \mathbf{D}_{54},\quad \mathcal{P}(\{a,b,c\})$$

   (a) Stabilire quali tra questi reticoli sono isomorfi tra loro, mostrando esplicitamente un isomorfismo o dimostrando che non esiste nessun isomorfismo.
   (b) In caso i reticoli siano isomorfi, stabilire se esiste più di un isomorfismo. In tal caso, esibirne almeno due.

(a) Osserviamo innanzitutto che tutti i reticoli in questione hanno lo stesso numero di elementi

$$|\mathbf{D}_{24}|=|\mathbf{D}_{54}|=|\mathbf{D}_{30}|=|\mathcal{P}(\{a,b,c\})|=8.$$

Tuttavia risulta che $\mathbf{D}_{24}$ e $\mathbf{D}_{54}$ sono reticoli isomorfi, e lo stesso vale per $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Invece $\mathbf{D}_{24}$ e $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ non sono reticoli isomorfi. (I rispettivi diagrammi di Hasse hanno infatti forma diversa).
(b) Esiste un unico isomorfismo di reticoli fra $\mathbf{D}_{24}$ e $\mathbf{D}_{54}$, ed è quello che manda

$$1\mapsto 1,\quad 2\mapsto 3,\quad 3\mapsto 2,\quad 4\mapsto 9,\quad 8\mapsto 27,\quad 6\mapsto 6,\quad 12\mapsto 18,\quad 24\mapsto 54.$$

Invece esistono $3!=6$ isomorfismi fra $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Ognuno di essi è determinato dalle immagini di $2,3,5$ in $\{a\},\{b\},\{c\}$. Due isomorfismi sono ad esempio

$$1\mapsto\emptyset,\quad 2\mapsto\{a\},\quad 3\mapsto\{b\},\quad 5\mapsto\{c\},\quad 6\mapsto\{a,b\},\quad 15\mapsto\{b,c\},\quad 10\mapsto\{a,c\},\quad 30\mapsto\{a,b,c\};$$

$$1\mapsto\emptyset,\quad 2\mapsto\{b\},\quad 3\mapsto\{a\},\quad 5\mapsto\{c\},\quad 6\mapsto\{a,b\},\quad 15\mapsto\{a,c\},\quad 10\mapsto\{b,c\},\quad 30\mapsto\{a,b,c\}.$$

6. *Usando le proprietà di un'algebra booleana $(\mathcal{A},\ \cdot\ ,+,'\ )$, esprimere come somma di prodotti l'espressione booleana $E(x,y,z,t,w)=\big((x+y')'zw'+(z't)'xy'w\big)'$.*

Usando le identità di de Morgan e la distirbutività fre le operazioni $\cdot$ e $+$ dell'algebra, troviamo

$$\begin{aligned}
\big((x+y')'zw'+(z't)'xy'w\big)' &=\big((x+y')'zw'\big)'\cdot\big((z't)'xy'w\big)'\\
=\big(x'yzw'\big)'\cdot\big((z+t')xy'w\big)' &=\big(x'yzw'\big)'\cdot\big(zxy'w+t'xy'w\big)'\\
=\big(x'yzw'\big)'\cdot\big(zxy'w\big)'\cdot\big(t'xy'w\big)' &=(x+y'+z'+w)\cdot(z'+x'+y+w')\cdot(t+x'+y+w')\\
&=xz't+xz'y+\ldots
\end{aligned}$$