1. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.

2. Calcolare il massimo comun divisore fra le seguenti coppie di numeri: $\mathrm{mcd}(623, 413)$, $\mathrm{mcd}(1014, 273)$, $\mathrm{mcd}(1122, 105)$, $\mathrm{mcd}(2244, 418)$.

3. Definiamo sui numeri naturali $\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ la relazione "aRb se $\mathrm{mcd}(a, b) > 1$". Determinare se la relazione è riflessiva, simmetrica o transitiva.

4. Siano $a = da'$ e $b = db'$ interi con $\mathrm{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\mathrm{mcd}(a', b') = 1$.

5. Siano n, m due numeri naturali. Siano $\mathrm{mcd}(n, m)$ e $\mathrm{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{mcm}(n, m) \cdot \mathrm{mcd}(n, m) = nm$.
   (b) Disegnare un algoritmo per calcolare il $\mathrm{mcm}(n, m)$ usando l'algoritmo Euclideo.

6. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (g) $n = 10001$ e $m = 9999$.

7. (a) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
   (b) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
   (c) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.

8. Determinare tutti i numeri primi $100 \leq p \leq 120$.

9. (i) Dimostrare che se $n \geq 2$ non è primo, allora esiste un primo p che divide n e tale che $p^2 \leq n$.
   (ii) Sfruttare il risultato (i) per dimostrare che 467 è primo (basta verificare che non ha divisori minori o uguali a 19).

10. Dimostrare che il numero 123456789 non è primo.

11. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
   (a) 91; (d) $15^2 - 2^2$; (g) $2^{11} - 1$;
   (b) 210; (e) $10!$; (h) 10001;
   (c) 6^6; (f) $2^{10} - 1$; (i) 100000003.

12. Sia $n \in \mathbf{N}$. Dimostrare
   (a) Se $2^n - 1$ è primo, allora n è primo.
   (b) Se $2^n + 1$ è primo, allora n è una potenza di 2.
   (c) Valgono le affermazioni inverse di (a) e (b)?

13. (a) Scrivere in base 2 e in base 8 i numeri 215 e 150.
   (b) Scrivere in base 7 i numeri 100 e 2400.

14. Per $n, b \in \mathbf{N}$, indichiamo con $(n)_b$ la scrittura di n in base b. Calcolare:
   (a) $(1011100)_2 + (11001)_2$; (b) $(11001)_2 \cdot (1110)_2$; (c) $(11011)_2 - (1100)_2$.

15. (a) Determinare il resto della divisione per 3 del numero $(1100110)_2$.
    (b) Determinare il resto della divisione per 4 del numero $(210211)_3$.

16. Dare una descrizione esplicita delle classi di congruenza modulo 3 in $\mathbf{Z}$.

17. Determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
    (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$; (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.

18. Dimostrare che la congruenza $2x \equiv 3 \pmod{2}$ non ha soluzioni $x \in \mathbf{Z}$.

19. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte.
    (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$; (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$; (c) $9x \equiv 24 \pmod{30}$.

20. Stabilire se per i seguenti sistemi di congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte.

(a) $$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 1 \pmod{4}; \end{cases}$$

21. Senza fare le moltiplicazioni per esteso, dimostrare che $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$ e $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.

22. Sia $x = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_{10}$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_n + x_{n-1} + \dots + x_0 \pmod{9}$.
    Usare questo risultato per dimostrare che la moltiplicazione $54321 \times 98765 = 5363013565$ è sbagliata.

23. Andare al sito `http://www.mat.uniroma2.it/~eal/psychic.swf`. Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.

24. Sia $x = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_{10}$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \dots + (-1)^n x_n \pmod{11}$.
    Usare questo risultato per controllare se 1213141516171819 è divisibile per 11.

25. Determinare il resto della divisione per 5 di $33213454^{27221447}$. Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.

26. (a) Determinare il resto delle divisioni per 5, per 7 e per 11 di 3^{302}; determinare il resto della divisione per 385 di 3^{302} (si noti che $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$).
    (b) Determinare il resto delle divisioni per 7, per 11 e per 13 di 5^{2003}; determinare il resto della divisione per 1001 di 5^{2003} (si noti che $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).