

1. Per le seguenti relazioni  $R$  di  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
  - (a)  $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$ ;
  - (b)  $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$ ;
  - (c)  $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$ ;
  - (d)  $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod{7}\}$ .
2. Sia  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ .
  - (a) Esibire una relazione su di  $X$ , che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
  - (b) Esibire una relazione su di  $X$ , che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
  - (c) Esibire una relazione su di  $X$ , che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
3. Sia  $X = \{1, 2, 3, \dots, 30, 31\}$ . Consideriamo su  $X$  la relazione:  $xRy$  se le date  $x$  e  $y$  del gennaio 2010 cadono nello stesso giorno della settimana (lunedì, martedì, etc...) Dimostrare che  $R$  è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
4. Sia  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .
  - (i) Consideriamo su  $X$  la relazione:  $xRy$  se  $x + y$  è un numero pari. Dimostrare che  $R$  è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
  - (ii) Consideriamo su  $X$  la relazione:  $xRy$  se  $x + y$  è un numero dispari. Determinare se  $R$  è una relazione di equivalenza.
5. Sia  $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  e sia  $R = \{(a, b), (c, d) \in A \times A : a + d = b + c\}$ .
  - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
  - (b) Sia  $\tilde{A}$  = l'insieme delle classi di equivalenza di  $R$ . Dimostrare che la mappa  $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{Z}$  che associa la differenza  $a - b$  alla classe di  $(a, b)$ , è ben definita ed è una biezione.
6. Sia  $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  e sia  $R = \{(a, b), (c, d) \in A \times A : ad = bc\}$ .
  - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
  - (b) Sia  $\tilde{A}$  = l'insieme delle classi di equivalenza di  $R$ . Dimostrare che la mappa  $f : \tilde{A} \rightarrow \mathbf{Q}_{>0}$  che associa la frazione  $a/b$  alla classe di  $(a, b)$ , è ben definita ed è una biezione.
7. Sia  $A$  un insieme di  $n$  elementi. Per  $i = 0, 1, \dots, n$ , sia  $P_i \subset \mathcal{P}(A)$  la collezione dei sottoinsiemi di  $A$  che possiedono esattamente  $i$  elementi.
  - (a) Dimostrare che gli insiemi  $P_i$  formano una partizione di  $\mathcal{P}(A)$ .
  - (b) Esibire una relazione di equivalenza su  $\mathcal{P}(A)$  che induce la partizione della parte (a).
8. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme  $\{a, b, c, d\}$ ?
9. Con  $\mathcal{P}(A)$  indichiamo l'insieme delle parti di un insieme  $A$ . Sia  $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ . Definiamo un ordinamento parziale su  $X$  ponendo  $A \leq B$  quando  $A \subset B$  per  $A, B \in X$ . Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
10. L'insieme  $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$  è ordinato mediante  $d \leq d'$  quando  $d$  divide  $d'$ . Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
  - (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
  - (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
  - (c) Trovare i maggioranti di  $\{2, 9\}$  e, se esiste,  $\sup(\{2, 9\})$ .
  - (d) Trovare i minoranti di  $\{60, 72\}$  e, se esiste,  $\inf(\{60, 72\})$ .
11. Sia  $X \subset \mathcal{P}\{1, 2, 3, 4\}$  dato da  $X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ . Definiamo un ordinamento parziale su  $X$  ponendo  $A \leq B$  quando  $A \subset B$  per  $A, B \in X$ . Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.
  - (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
  - (b) Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
  - (c) Trovare i maggioranti di  $\{\{2, \}, \{4\}\}$  e, se esiste,  $\sup(\{2, \}, \{4\})$ .

- (d) Trovare i minoranti di  $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$  e, se esiste,  $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$ .
12. Si consideri su  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  l'ordinamento lessicografico:  
 $(m, n) \leq (p, q)$  se  $m < p$ , oppure se  $m = p$  e  $n \leq q$ .
- (a) Dimostrare che è un ordinamento parziale.
- (b) Sia  $A = \{(1, 2), (4, 5), (7, 7), (8, 9), (3, 4), (3, 6), (7, 2)\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ , con l'ordinamento indotto. Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento su  $A$ . Determinare gli elementi massimali e minimali. Esibire, se esistono, massimo e minimo assoluti.
13. Sia  $X$  un insieme e siano  $R_1$  e  $R_2$  due relazioni di equivalenza su  $X$ .
- (a) Dimostrare che  $R_1 \cap R_2$  è una relazione di equivalenza.
- (b) Descrivere la partizione di  $X$  associata alla relazione  $R_1 \cap R_2$  in termini di quelle associate a  $R_1$  e  $R_2$ .
- (c) Esibire un esempio di  $R_1$  e  $R_2$  tali che  $R_1 \cup R_2$  non è una relazione di equivalenza.
14. Sia  $A = \{a, b, c, d, e\}$  con la relazione

$$R = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, e), (c, a), (c, d), (e, a)(e, b), (e, c), (e, d)\}.$$

Disegnare il grafo diretto associato. Scriverne la matrice associata.

15. Sia  $A = \{a, b, c, d, e\}$ . Determinare la chiusura transitiva delle seguenti relazioni:
- (a)  $\{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$ .
- (b)  $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$ .
- (c)  $\{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$ .
- (d)  $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$ .