

1. Sia p un numero primo e sia $n = mp + 1$, con $m \in \mathbf{Z}$. Chi è il resto della divisione di n per p ? Prendere spunto da questo fatto per dimostrare che i numeri primi sono infiniti.
2. Sia $n \in \mathbf{Z}$. Calcolare $\text{mcd}(n + 2, n)$.
3. Determinare il massimo comune divisore fra $m = 4567$ ed $n = -668$, fra $m = -4567$ ed $n = 668$ e fra $m = -4567$ ed $n = -668$.
4. È vero che $n = 56$ divide $m = -392$ e che $n = -56$ divide $m = -392$? Spiegare la risposta.
5. È vero che ogni soluzione intera dell'equazione $20x + 10y = 0$ è anche soluzione dell'equazione $4x + 2y = 0$? È vero il viceversa? Spiegare bene.
6. È vero che ogni soluzione intera dell'equazione $20x + 10y = 10$ è anche soluzione dell'equazione $4x + 2y = 2$? È vero il viceversa? Spiegare bene.
7. Siano dati $m = 1009$ e $n = 1013$.
 - (a) Calcolare il massimo comune divisore $\text{mcd}(m, n)$.
 - (b) Determinare una coppia di interi $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $am + bn = \text{mcd}(m, n)$.
 - (c) Determinare tutte le coppie di interi tali che $am + bn = \text{mcd}(m, n)$.
 - (d) Determinare tutte le coppie di interi tali che $a1009 + b1013 = 3$ (spiegare bene).
 - (e) Determinare tutte le coppie di interi tali che $2a1009 + 2b1013 = 2$ (spiegare bene).
 - (f) Ripetere (a)–(e) per $m = 4657$, $n = 345$, $m = 567$, $n = 789$.
8. È vero che ogni soluzione intera della congruenza $14x \equiv 0 \pmod{24}$ è anche soluzione dell'equazione $7x \equiv 0 \pmod{12}$? È vero il viceversa? Spiegare bene.
9. È vero che ogni soluzione intera della congruenza $14x \equiv 2 \pmod{24}$ è anche soluzione dell'equazione $7x \equiv 1 \pmod{12}$? È vero il viceversa? Spiegare bene.
10.
 - (a) Determinare il resto della divisione di 3456789 per 10.
 - (b) Determinare il resto della divisione per 2 del numero $(1100110)_2$.
 - (c) Determinare il resto della divisione per 3 del numero $(210211)_3$.
11. Dire quali delle seguenti congruenze sono equivalenti fra loro (spiegare bene la risposta):

$$15x \equiv 6 \pmod{4}, \quad 15x \equiv 10 \pmod{4}, \quad 19x \equiv 10 \pmod{4}, \quad 5x \equiv 2 \pmod{4}.$$
12. Determinare tutti gli interi positivi di tre cifre decimali che soddisfano la congruenza $3x \equiv 1 \pmod{171}$.
13. Determinare tutti gli interi positivi di tre cifre decimali che soddisfano il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{11} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

14. Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \pmod{22} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$$

15. Per ogni intero $n > 1$ determinare il resto della divisione di $(n - 1)!$ per n .

16. Verificare che il seguente sistema di congruenze ha esattamente 10 soluzioni $0 \leq x \leq 100$.

$$\begin{cases} 3x \equiv 7 \pmod{10} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5}. \end{cases}$$

17. Determinare tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{14} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7}, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x \equiv 0 \pmod{6} \\ 3x \equiv 6 \pmod{9}, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x \equiv 2 \pmod{4} \\ 3x \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases}$$