1. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ un insieme di 4 elementi. In $\mathcal{P}(X)$ consideriamo la seguente relazione ARB se $|A| = |B|$ (cioè se A e B hanno la stessa cardinalità).
   (a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza, elencandone gli elementi.
   (c) Verificare che le classi di equivalenza determinano una partizione di $\mathcal{P}(X)$.

2. Sia $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \le n \le 5\} \times \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \le n \le 5\}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Determinare le classi di equivalenza di R, elencandone gli elementi. Verificare che formano una partizione di A.
   (c) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R. Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Q}_{>0}$ che associa la frazione a/b alla classe di (a, b), è ben definita (cioè tutti gli elementi della stessa classe di equivalenza hanno la stessa immagine). Determinare l'immagine $f(A)$.

3. Sia $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 x_2 \neq 0\}$. Dati $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in A, diciamo che $X\,R\,Y$ se $x_1 y_1 > 0$ e $x_2 y_2 > 0$.
   (a) Verificare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Descrivere le classi di equivalenza di A e determinare quante sono. Esibire un elemento di ogni classe.
   (c) Rispondere alle domande (a) e (b), quando R è la relazione data da: $X\,R\,Y$ se $x_1 y_1 > 0$ e $x_2 = y_2$.

4. Sia $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ l'insieme dei divisori di 15 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Elencare tutti gli elementi di R in $D_{15} \times D_{15}$.

5. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$ l'insieme della parti di $\{a, b\}$ con la relazione di ordine parziale data dalla contenenza: ARB se $A \subseteq B$. Elencare tutti gli elementi di R in $X \times X$.

6. Sia D_{30} l'insieme dei divisori di 30 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di D_{30} e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in D_{30}$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$ con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in D_{36}$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

8. Sia D_{36} l'insieme dei divisori di 36 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Sia $S = \{4, 6\} \subset D_{36}$.
   (a) Con quali elementi di D_{36} è in relazione 6?
   (b) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di S in D_{36}.
   (c) Determinare, se esistono, $\inf(S)$, $\sup(S)$, $max(S)$, $min(S)$.

9. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con l'ordinamento lessicografico. Disegnare il diagramma di Hasse associato.

10. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con la relazione data da $(x, y, z)R(r, s, t)$ se $x + y + z = r + s + t)$.
    (a) Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza.
    (b) Determinare le classi di equivalenza enumerandone gli elementi.
    (c) Verificare che determinano una partizione di X.