

1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Indichiamo con \cap, \cup e $\bar{}$ rispettivamente le operazioni di *intersezione*, *unione* e *complementare* in $\mathcal{P}(X)$. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, \bar{})$ è un'algebra di Boole (verificare che sono soddisfatti gli assiomi).
2. Dato un numero naturale n , si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ sia prodotto di k primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} := \frac{n}{a}$.
 - (a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, \text{mcd}, \text{mcm}, \bar{})$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
 - (b) Sia $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione

$$f: \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad k = p_{i_1} \cdots p_{i_\alpha} \mapsto \{p_{i_1}, \dots, p_{i_\alpha}\}$$

è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

3. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ con le operazioni \oplus, \otimes e $\bar{}$ definite nel seguente modo:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 1,$$

$$1 \otimes 1 = 1, \quad 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{})$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).

4. Sia dato l'insieme $\mathcal{A} = \{000, 010, 001, 100, 110, 101, 011, 111\}$ con le operazioni definite cifra per cifra come nell'esercizio precedente
 - (a) Qual è l'identità per \oplus ?
 - (b) Qual è l'identità per \otimes ?
 - (c) Calcolare le seguenti espressioni:

$$(001 \otimes 001) \oplus 100 = \dots, (111 \oplus 001) \oplus 100 = \dots, (001 \otimes \overline{001}) \oplus \overline{101 \otimes 010} = \dots$$

- (d) Dimostrare che $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{})$ è un'algebra Booleana (verificare che soddisfa gli assiomi).
- (e) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Determinare la relazione di ordine parziale corrispondente, definita da $x \leq y$ se $x \otimes y = x$.
5. Sia \mathcal{B} l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita. Dimostrare che $(\mathcal{B}, \cap, \cup, \bar{})$ è un'algebra di Boole.
6. Dimostrare che le algebre di Boole $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cap, \cup, \bar{})$ e $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \cap, \cup, \bar{})$ non possono essere isomorfe.
7. Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale.
 - (a) Verificare che le operazioni \wedge e \vee sono associative;
 - (b) Un'algebra di Boole, con le stesse operazioni, è anche un reticolo Booleano. Verificare che la relazione di ordine parziale definita da $A \leq B$ se $A \wedge B \Leftrightarrow A$ equivale a $A \leq B$ se $A \Rightarrow B$. In altre parole, verificare che gli enunciati $A \wedge B \Leftrightarrow A$ e $A \Rightarrow B$ sono logicamente equivalenti.
8. Sia $(\mathcal{A}, \otimes, \oplus, \bar{})$ un'algebra Booleana.
 - (a) In un'algebra booleana valgono le Leggi di De Morgan:

$$\overline{(x \oplus y)} = \bar{x} \otimes \bar{y}, \quad \overline{(x \otimes y)} = \bar{x} \oplus \bar{y}.$$
 Enunciare Leggi di De Morgan per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.
 - (b) In un'algebra booleana valgono le Leggi di assorbimento:

$$a \otimes (a \oplus b) = a, \quad a \oplus a \otimes b = a.$$

Enunciare Leggi di assorbimento per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.

(c) In un'algebra booleana valgono le Leggi di idempotenza:

$$a \oplus a = a, \quad a \otimes a = a.$$

Enunciare Leggi di idempotenza per le algebre di Boole degli esercizi 1, 2 e 7.

9. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$, dove $x+y$ denota la somma di due elementi, xy il prodotto e x' il complemento, scrivere ognuna delle seguenti espressioni come somma di prodotti completata:

- (a) $x'y((zt)' + x)'$; (b) $(x + x'y + xy'z)(x'z)$; (c) $x + x'yz$;
 (d) $(xy)''(xz + yz)'$; (e) $(xyz)'(x + y + z)'$; (d) $x(y + z)' + y'(xz)'$.

10. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$,

(a) scrivere le seguenti espressioni come somma di prodotti completata:

$$x'y((zt)' + x)'; \quad (b) (x + x'y + xy'z)(x'z); \quad (c) x + x'yz.$$

(b) scrivere le seguenti espressioni come somma di implicanti primi:

$$xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'; \quad (b) txyz' + tx'yz + tx'y'z' + t'xyz + t'xy'z + t'x'y'z + t'x'y'z'.$$

(c) scrivere le seguenti espressioni in forma *minimale*:

$$x'y + x'y'; \quad (b) xy + xy'; \quad (c) xy + xy' + x'y + xy'; \quad (d) xyz + xy'z + x'yz + x'y'z + x'y'z'.$$

11. Nell'algebra di Boole dell'esercizio 1, si considerino le espressioni booleane

$$E(A, B, C) = A \cap B \cup A \cap C, \quad F(A, B, C) = A \cap B \cap C \cup B.$$

- (a) Disegnare i diagrammi di Venn delle due espressioni;
 (b) Determinare se E ed F sono somma di implicanti primi (aiutarsi col disegno).

12. Nell'algebra di Boole dell'esercizio 7, si consideri l'espressione booleana

$$E(A, B, C) = A \vee \neg(A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B \vee \neg(B \wedge C)).$$

- (a) Esprimere $E(A, B, C)$ come somma di prodotti;
 (b) Determinare un'espressione minimale di $E(A, B, C)$.

13. In un'algebra di Boole $(A, +, \cdot, ')$, siano date le espressioni

$$E: xy'z + y'z' + xy'z', \quad F: xyz + x'y + xz.$$

- (a) determinare se E ed F sono equivalenti;
 (b) determinare se sono somma di implicanti primi;
 (c) determinare se sono minimali.