1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Indichiamo con $\cap$ e $\cup$ le operazioni di intersezione e di unione fra sottoinsiemi di X.
   (a) Dimostrare che $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ è un reticolo (verificare che soddisfa gli assiomi);
   (b) Verificare che la relazione di ordine parziale definita a partire dalle operazioni di reticolo

$$A“\leq”B \;\text{ se }\; A \cap B = A \qquad (\Leftrightarrow \quad A \cup B = B)$$

   è la relazione di contenenza: $A“\leq”B$ se $A \subset B$.

2. Sia X un insieme e sia $(\mathcal{P}(X), \subset)$ l'insieme delle parti di X, con la relazione di ordine parziale dato dalla relazione di *contenenza*.
   (a) Verificare che per ogni coppia A,B esistono $Z, W \in \mathcal{P}(X)$ tali che

$$\begin{cases} Z \subset A \\ Z \subset B \end{cases}, \qquad \begin{cases} A \subset W \\ B \subset W \end{cases}.$$

   (b) Verificare che le operazioni su $(\mathcal{P}(X), \subset)$ definite da

$$A \wedge B := inf\{A, B\}, \qquad A \vee B := sup\{A, B\}$$

   coincidono rispettivamente con le operazioni di intersezione $\cap$ e di unione $\cup$.

3. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Indichiamo con *mcd* e *mcm* le operazioni di *massimo comun divisore* e *minimo comune multiplo* fra numeri naturali.
   (a) Dimostrare che $(\mathbf{N}, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm})$ è un reticolo (verificare che soddisfa gli assiomi);
   (b) Verificare che la relazione di ordine parziale definita a partire dalle operazioni di reticolo

$$m“\leq”n \;\text{ se }\; mcd(m,n) = m \qquad (\Leftrightarrow \quad mcm(m,n) = n)$$

   è la relazione di *divisibilità*: $m“\leq”n$ se $m \mid n$.

4. Sia $(\mathbf{N}, \mid\,)$ l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.
   (a) Verficare che per ogni coppia $m, n \in \mathbf{N}$ esistono $z, w \in \mathbf{N}$ tali che

$$\begin{cases} z \mid m \\ z \mid n, \end{cases} \qquad \begin{cases} m \mid w \\ n \mid w. \end{cases}$$

   (b) Verificare che le operazioni su $(\mathbf{N}, \mid\,)$ definite da

$$A \wedge B := inf\{A, B\}, \qquad A \vee B := sup\{A, B\}$$

   coincidono rispettivamente con le operazioni di intersezione *mcd* e di unione *mcm*.

5. Sia X un insieme e sia $Y \subset X$ un sottoinsieme.
   (a) Verificare che $\mathcal{P}(Y)$ è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$, ossia è chiuso rispetto alle operazioni di intersezione e di unione.
   (b) Disegnare il diagramma di Hasse di $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ed evidenziare il sottoreticolo $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

6. Sia $n \in \mathbf{N}$ un numero naturale fissato e sia D_n l'insieme dei divisori di n

$$D_n = \{a \in \mathbf{N} \mid \;\; a \mid n\}.$$

(a) Verificare che D_n è un sottoreticolo di $(\mathbf{N}, mcd, mcm)$, ossia è chiuso rispetto alle operazioni di mcd e di mcm.
(b) Sia $m < n$ un divisore di n. Verificare che D_m è un sottoreticolo di D_n.
(c) Disegnare il diagramma di Hasse di D_{12} ed evidenziare il sottoreticolo D_6.

7. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottoreticoli di $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}), \cap, \cup)$:
(a) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, |A| \text{ dispari } \}$; (c) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, A \supseteq \{1,3\} \}$;
(b) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, |A| \geq 2 \}$; (d) $\{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \,:\, |A| \leq 1 \,\text{oppure}\, |A| = 3\}$

8. Siano $(L, \vee, \wedge)$ e $(L', \vee', \wedge')$ due reticoli. Un *isomorfismo di reticoli* è una funzione biettiva $f : L \to L'$ tale che per ogni $x, y \in L$ valgono

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y), \qquad f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y).$$

In tal caso i due reticoli si dicono *isomorfi*.
(a) Dimostrare che se $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli allora anche $f^{-1} : L' \to L$ lo è;
(b) Siano " $\leq$ " e " $\leq'$ " le relazioni di ordine parziale su L e su L' definite a partire dalle rispettive operazioni. Verificare che se $f\colon L \to \mathrm{L}'$ è un isomorfismo di reticoli allora

$$a \text{``} \leq \text{''} b \quad \Rightarrow \quad f(a) \text{``} \leq' \text{''} f(b).$$

9. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e (D_{15}, mcd, mcm) sono isomorfi (esibire un isomorfismo di reticoli);

10. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \cap, \cup)$ sono isomorfi (esibire un isomorfismo di reticoli);

11. Verificare che i reticoli (D_6, mcd, mcm) e (D_8, mcd, mcm) non sono isomorfi.

12. Un isomorfismo $f\colon (L, \wedge, \vee) \to (L, \wedge, \vee)$ di un reticolo in sè si dice un *automorfismo* del reticolo. Determinare quanti sono gli automorphismi del reticolo (D_6, mcd, mcm).

13. Stabilire se $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ sono reticoli isomorfi; in caso affermativo, stabilire quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

14. Stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_{30}$ e $\mathbf{D}_{105}$ sono isomorfi. In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{30} \to \mathbf{D}_{105}$.

15. Stabilire se i reticoli $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ e $\mathbf{D}_{24}$ sono isomorfi. Stabilire se uno dei due reticoli è isomorfo a $\mathbf{D}_{30}$.

16. Stabilire se i reticoli $\mathbf{D}_{12}$ e $\mathbf{D}_{18}$ sono isomorfi. In caso affermativo, determinare tutti gli isomorfismi di reticolo $f : \mathbf{D}_{12} \to \mathbf{D}_{18}$.

17. Verificare che il reticolo $(\mathbf{N}, mcd, mcm)$ ha limite inferiore, ma non ha limite superiore.

18. Sia X un insieme arbitrario (possibilmente infinito).Verificare che il reticolo $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ ha limite inferiore e limite superiore. Chi sono?

19. Sia $n \in \mathbf{N}$ un numero naturale fissato.
(a) Determinare il limite inferiore e il limite superiore del reticolo (D_n, mcd, mcm);
(b) Dimostrare che D_n è complementato se e solo se n è prodotto di primi distinti.

20. Si consideri il reticolo $L = \{A \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) : A \subseteq \{1,2,3\}\}$, con le operazioni di unione e intersezione.
(a) Dimostrare che L è limitato;

(b) Stabilire se ci sono elementi il cui complemento non è unico;
(c) Stabilire se L è un reticolo distributivo.

21. Quali dei seguenti reticoli sono reticoli con complemento?
   (a) $\mathbf{D}_{70}$;
   (b) $\mathbf{D}_{18}$;
   (c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

22. Stabilire se i seguenti reticoli sono reticoli distributivi, reticoli con complemento, reticoli con complemento unico:
   (a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, munito delle operazioni *mcd* e *mcm*;
   (b) $\mathbf{D}_{12}$;
   (c) $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$;
   (d) $\mathbf{D}_{30}$;
   (e) $\{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$, munito delle operazioni di inf e sup indotte dalla relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.

23. Considerare l'esercizio 14.80 del libro di Schaum. Verificare che il diagramma di Hasse del reticolo D_{60} contenuto nella figura 14–29 a pag. 475 è sbagliato.