1. Determinare tutti i numeri primi $100 \leq p \leq 120$.

2. (i) Dimostrare che se $n \geq 2$ non è primo, allora esiste un primo p che divide n e tale che $p^2 \leq n$.
   (ii) Sfruttare il risultato (i) per dimostrare che 467 è primo (basta verificare che non ha divisori minori o uguali a 19).

3. Dimostrare che il numero 123456789 non è primo.

4. Fattorizzare i seguenti numeri in fattori primi.
   (a) 91; (d) $15^2 - 2^2$; (g) $2^{11} - 1$;
   (b) 210; (e) 10!; (h) 10001;
   (c) 6^6; (f) $2^{10} - 1$; (i) 100000003.

5. Calcolare il massimo comun divisore fra le seguenti coppie di numeri: $\mathrm{mcd}(623, 413)$, $\mathrm{mcd}(1014, 273)$, $\mathrm{mcd}(1122, 105)$, $\mathrm{mcd}(2244, 418)$.

6. Definiamo sui numeri naturali $\mathbf{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ la relazione "aRb se $\mathrm{mcd}(a, b) > 1$". Determinare se la relazione è riflessiva, simmetrica o transitiva.

7. Siano $a = da'$ e $b = db'$ interi con $\mathrm{mcd}(a, b) = d$. Dimostrare che $\mathrm{mcd}(a', b') = 1$.

8. Siano n, m due numeri naturali. Siano $\mathrm{mcd}(n, m)$ e $\mathrm{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m. Dimostrare che $\mathrm{mcm}(n, m) \cdot \mathrm{mcd}(n, m) = nm$.

9. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (g) $n = 10001$ e $m = 9999$.

10. (a) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
    (b) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
    (c) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.

11. Determinare se la seguente equazione diofantea ha soluzioni:

$$2000000007X + 1000000000Y = 3.$$

12. Dare una descrizione esplicita delle classi di congruenza modulo 3 e delle classi di congruenza modulo 5 in $\mathbf{Z}$.

13. Senza fare la moltiplicazione, determinare il resto della divisione per 10 e per 5 dei seguenti numeri

$$12345678 \times 90123, \qquad 9085679 \times 120001, \qquad 4876515329871674 \times 765976.$$

14. Verificare che $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.

15. Determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
    (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$; (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$; (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.

16. Dimostrare che la congruenza $2x \equiv 3 \pmod{2}$ non ha soluzioni $x \in \mathbf{Z}$.

17. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. Determinare poi le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ che soddisfano $0 < x < 100$.
    (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$; (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$; (c) $9x \equiv 24 \pmod{30}$.

18. Stabilire se per i seguenti sistemi di congruenze esistono soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte.

(a) $$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 1 \pmod{4}; \end{cases}$$

19. Determinare il resto delle divisioni per 3, 9, 4, 11 del numero 3548917.

20. Senza fare le moltiplicazioni per esteso, dimostrare che $1234567 \times 90123 \equiv 1 \pmod{10}$ e $2468 \times 13579 \equiv -3 \pmod{25}$.

21. Sia $x = (x_n x_{n-1} \ldots x_0)_{10}$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_n + x_{n-1} + \ldots + x_0 \pmod{9}$.
    Usare questo risultato per dimostrare che la moltiplicazione $54321 \times 98765 = 5363013565$ è sbagliata.

22. Andare al sito `http://www.mat.uniroma2.it/~eal/psychic.swf`. Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.

23. Sia $x = (x_n x_{n-1} \ldots x_0)_{10}$ un numero intero positivo rappresentato in base 10. Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$.
    Usare questo risultato per controllare se 1213141516171819 è divisibile per 11.

24. Sia x un numero naturale di 3 cifre (in base 10). Supponiamo che

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13}. \end{cases}$$

Determinare x.