Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. (Qui usiamo la convenzione $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Diremo che è una successione *ricorsiva* o *definita per ricorrenza* se il termine generale della successione è espresso in funzione di un certo numero di termini precedenti

$$a_n = \phi(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}),$$

dove k è un intero positivo. L'intero k si dice *grado* (o *ordine*) della successione.

Osservazione. Una successione ricorsiva di grado k è completamente determinata dai primi k termini. Infatti, conoscendo $a_1, a_2, \ldots, a_k$, i termini successivi si ottengono come

$$a_{k+1} = \phi(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1), \quad a_{k+2} = \phi(a_{k+1}, a_k, \ldots, a_2), \ldots \ etc \ \ldots.$$

L'equazione

$$a_n - \phi(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) = 0, \tag{1}$$

soddisfatta dal termine generale di una successione ricorsiva, è detta equazione *ricorsiva* o *alle differenze finite*. L'equazione si dice:

- *lineare* se la funzione ϕ è una funzione lineare di $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, ossia

$$a_n - c_1(n)a_{n-1} - c_2(n)a_{n-2} - \ldots - c_k(n)a_{n-k} - F(n) = 0,$$

dove i coefficienti $c_1(n), \ldots, c_k(n)$ e il termine noto $F(n)$ sono funzioni di n, con $c_k(n) \not\equiv 0$;

- *lineare a coefficienti costanti* se i coefficienti $c_1, \ldots, c_k$ sono costanti (il termine noto non è necessariamente costante);

- *lineare omogenea* se il termine noto è identicamente nullo $F(n) \equiv 0$.

Esempi. (a) L'equazione $a_n = na_{n-1},\ n \geq 1$, è lineare omogenea, a coefficienti non costanti (qui $c_1(n) = n$), di grado 1. Poniamo ad esempio $a_0 = 1$. Allora

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2a_1 = 2, \quad a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots \ \ldots, a_n = n!.$$

(b) L'equazione $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-2}^2,\ n \geq 2$, è omogenea, non lineare (qui a_{n-2} appare al quadrato), di grado 3.

(c) L'equazione $a_n = na_{n-2} + 2^n,\ n \geq 2$, è lineare non omogenea, a coefficienti non costanti, di grado 2.

(d) L'equazione $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2$, è lineare omogenea, a coefficienti costanti, di grado 2.

Poniamo ad esempio $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Allora

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \ldots \ \ldots$$

ed $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione di Fibonacci.

Poniamo adesso $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$. In questo caso

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 11, \quad a_6 = 18, \ldots \ \ldots$$

Il termine generale della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ così ottenuta soddisfa la stessa equazione ricorsiva della successione di Fibonacci, ma avendo i termini iniziali diversi, è una successione diversa da quella di Fibonacci.

Equazioni ricorsive lineari a coefficienti costanti.
Sia
$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = F(n), \tag{2}$$
una equazione ricorsiva lineare a coefficienti costanti $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, con $c_k \neq 0$. L'equazione
$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} + \ldots - c_k a_{n-k} = 0, \tag{3}$$
è l'equazione omogenea associata.

Proposizione 1. *Le soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti di grado k formano uno spazio vettoriale.*

Dim. Dobbiamo verificare che date due soluzioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ dell'equazione (3), per ogni $A, B \in \mathbb{R}$ la successione $\{S_n = A\alpha_n + B\beta_n\}_n$ è soluzione dell'equazione (3). Sostituendo il termine generale S_n nella (3) e sfruttando il fatto che per ipotesi
$$\alpha_n - c_1\alpha_{n-1} - c_2\alpha_{n-2} - \ldots - c_k\alpha_{n-k} = \beta_n - c_1\beta_{n-1} - c_2\beta_{n-2} - \ldots - c_k\beta_{n-k} = 0,$$
troviamo infatti
$$S_n - c_1 S_{n-1} - c_2 S_{n-2} - \ldots - c_k S_{n-k} =$$
$$= (A\alpha_n + B\beta_n) - c_1(A\alpha_{n-1} + B\beta_{n-1}) - c_2(A\alpha_{n-2} + B\beta_{n-2}) - \ldots - c_k(A\alpha_{n-k} + B\beta_{n-k}) =$$
$$= A(\alpha_n - c_1\alpha_{n-1} - c_2\alpha_{n-2} - \ldots - c_k\alpha_{n-k}) + B(\beta_n - c_1\beta_{n-1} - c_2\beta_{n-2} - \ldots - c_k\beta_{n-k}) = 0.$$
Questo dimostra che le soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti formano uno spazio vettoriale (letteralmente abbiamo dimostrato che le successioni che soddisfano l'equazione (3) sono un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le successioni, dove la somma e il prodotto per uno scalare sono definiti termine per termine).

Le soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti di grado k formano uno spazio vettoriale di dimensione k ed una base di questo spazio può essere costruita esplicitamente a partire dalle radici del polinomio a coefficienti reali di grado k
$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - \ldots - c_1 = 0$$
ad essa associato. Qui ci limitiamo a considerare in dettaglio i casi di grado 1 e 2.

• *Equazioni di grado 1.* Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti di grado uno
$$a_n - c a_{n-1} = 0, \quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0, \tag{4}$$
ha dimensione 1.

Dim. Dimostriamo questo fatto esibendo innanzitutto una soluzione non banale $\{\alpha_n\}$ dell'equazione (4). Mostriamo poi che ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il cui termine generale soddisfa la (4) è della forma $\{a_n = A\alpha_n\}$, per un opportuno scalare $A \in \mathbb{R}$, determinato dal valore termine iniziale a_0 (in altre parole dimostriamo che $\{a_n\}_n \in \mathrm{span}\{\{\alpha_n\}_n\}$).
In questo caso, il polinomio associato all'equazione è $\lambda - c$ ed ha come radice il coeffciente c.
Definiamo $\{\alpha_n = c^n\}_n$. È immediato che $c^n = c \cdot c^{n-1}$, cioè la successione $\{\alpha_n\}_n$ soddisfa l'equazione (4) e dunque è un elemento non banale dello spazio delle soluzioni. Indichiamo con
$$\{S_n = A\alpha_n\}_n,\ A \in \mathbb{R},$$
la famiglia dei multipli di $\{\alpha_n\}_n$.

Sia ora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione il cui termine generale soddisfa la (4).
Per ogni valore a_0 del termine iniziale, esiste $A \in \mathbb{R}$ per cui $S_0 = a_0$: basta prendere infatti $A = a_0$.
Poiché una successione di grado uno è completamente determinata dal termine iniziale a_0, segue che

$$\{a_n = a_0 c^n\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che è esattamente quello che volevamo dimostrare.

• *Equazioni di grado 2.* Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare omogenea a coefficienti costanti di grado due

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_2 \neq 0, \tag{5}$$

ha dimensione 2.

Dim. Il metodo è lo stesso usato per le equazioni di grado uno. Sia $\lambda^2 - c_1\lambda - c_2$ il polinomio associato all'equazione (5). Si verifica facilmente che se $r \neq 0$ è una radice reale del polinomio, la successione $\{r^n\}_n$ è soluzione dell'equazione: infatti

$$r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} = r^{n-2}(r^2 - c_1 r - c_2) = 0.$$

Adesso distinguiamo tre casi, a seconda della natura delle radici del polinomio.

- *radici reali e distinte* $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. Definiamo $\{\alpha_n = r_1^n\}_n$ e $\{\beta_n = r_2^n\}_n$. Le due successioni sono chiaramente linearmente indipendenti in quanto $r_1 \neq r_2$ implica che non sono una multipla dell'altra (elemento per elemento). Sia

$$\{S_n = A\alpha_n + B\beta_n\}_n, \qquad A, B \in \mathbb{R} \tag{6}$$

lo spazio da esse generato. Resta da far vedere che ogni soluzione della (5) è un elemento della famiglia (6). Precisamente, data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione il cui termine generale soddisfa la (5), con termini iniziali a_0 ed a_1, esistono unici $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_n = A\alpha_n + B\beta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché una successione di grado due è completamente determinata dai due termini iniziali, basterà far vedere che esistono unici $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = a_0 \\ Ar_1 + Br_2 = a_1 \end{cases}.$$

Questo segue dal fatto che $r_1 \neq r_2$ implica che il sistema di destra è compatibile ed ha soluzione unica.

- *radice reale r di molteplicità 2.* Definiamo $\{\alpha_n = r^n\}_n$ e $\{\beta_n = nr^n\}_n$. Le successioni sono chiaramente linearmente indipendenti in quanto $r_1 \neq r_2$ implica che non sono una multipla dell'altra (elemento per elemento). Verifichiamo che anche $\{\beta_n\}_n$ soddisfa l'equazione (5): infatti

$$nr^n - c_1(n-1)r^{n-1} - c_2(n-2)r^{n-2} = nr^{n-2}(r^2 - c_1 r - c_2) + r^{n-2}(c_1 r + 2c_2) = 0,$$

usando il fatto che r è radice del polinomio e che nel caso di radice reale doppia $c_1 r + 2c_2 = 0$ (in questo caso il discriminante del polinomio $\Delta = c_1^2 + 4c_2 = 0$ e la radice è data da $r = \frac{c_1}{2}$, da cui segue che $c_1 \cdot \frac{c_1}{2} + 2(\frac{-c_1^2}{4}) = 0$). Sia

$$\{S_n = A\alpha_n + Bn\beta_n\}_n, \qquad A, B \in \mathbb{R} \tag{6}$$

lo spazio da esse generato.

A questo punto resta solo da dimostrare che data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione il cui termine generale soddisfa la (5), con termini iniziali a_0 ed a_1, esistono unici $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_n = A\alpha_n + Bn\beta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ossia tali che

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = a_0 \\ Ar + Br = a_1 \end{cases}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{pmatrix} \neq 0$, il sistema di destra è compatibile ed ha soluzione unica.

- *radici complesse coniugate z e $\bar{z}$, con $Im(z) \neq 0$.* Consideriamo le successioni complesse $\{\alpha_n = z^n\}_n$ e $\{\bar{\alpha}_n = \bar{z}^n\}_n$. Le successioni sono chiaramente linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (e anche su $\mathbb{C}$), in quanto non esiste uno scalare reale t (né uno scalare complesso) con la proprietà che $tz^n = \bar{z}^n$, per ogni n (pensare a come sono messi nel piano $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$). Entrambe soddisfano l'equazione (5): infatti

$$z^n - c_1 z^{n-1} - c_2 z^{n-2} = z^{n-2}(z^2 - c_1 z - c_2) = 0 = \bar{z}^n - c_1 \bar{z}^{n-1} - c_2 \bar{z}^{n-2} = \bar{z}^{n-2}(\bar{z}^2 - c_1 \bar{z} - c_2).$$

Sia

$$\{S_n = A\alpha_n + B\beta_n\}_n, \tag{6}$$

lo spazio da esse generato, con A, B scalari possibilmente complessi.

Osservazione. Se $\{S_n\}_n$ è reale, allora $B = \bar{A}$.

Dim. Abbiamo che $\{S_n\}$ è reale se e solo se i due termini iniziali S_0 ed S_1 sono reali (sono quelli che determinano tutti gli altri). Scriviamo $z = x + iy$ e $A = \alpha + i\beta$. Dalle equazioni del sistema

$$\begin{cases} S_0 = A + B \in \mathbb{R} \\ S_1 = Az + B\bar{z} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

deduciamo rispettivamente $\mathrm{Im}(A + B) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B) = 0$ e $\mathrm{Im}(Az + B\bar{z}) = 0$. Ne otteniamo $B = \bar{A}$.

Adesso possiamo caratterizzare il sottoinsieme delle successioni *reali* all'interno della famiglia $\{S_n\}_n$ come quelle il cui termine generale è della forma

$$Az^n + \bar{A}\bar{z}^n = 2\mathrm{Re}(Az^n) = 2\alpha|z|^n \cos(n\theta) - 2\beta|z|^n \sin(n\theta) = P|z|^n \cos(n\theta) + Q|z|^n \sin(n\theta),$$

per $\theta = arg(z)$, con $P, Q \in \mathbb{R}$.

Resta da far vedere che ogni successione reale $\{a_n\}_n$ che soddisfa l'equazione (5) può essere ottenuta per opportuni valori di P e Q, determinati univocamente dai termini iniziali a_0 ed a_1. Infatti il sistema

$$\begin{cases} P = a_0 \\ P|z|\cos\theta + Q|z|\sin\theta = a_1 \end{cases}$$

è compatibile ed ha soluzione unica (in coordinate polari, la condizione $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, si traduce in $\sin\theta \neq 0$, per $\theta = arg(z)$).

Proposizione 2. *Siano* $\{\alpha_n\}_n$ *e* $\{\beta\}_n$ *soluzioni di un'equazione ricorsiva lineare non omogenea a coefficienti costanti. Allora la loro differenza è soluzione dell'equazione omogena associata.*

Dim. *Si verifica che*

$$(\alpha_n - \beta_n) - c_1(\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) - c_2(\alpha_{n-2} - \beta_{n-2}) - \ldots - c_k(\alpha_{n-k} - \beta_{n-k}) =$$

$$= (\alpha_n - c_1\alpha_{n-1} - c_2\alpha_{n-2} - \ldots - c_k\alpha_{n-k}) - (\beta_n - c_1\beta_{n-1} - c_2\beta_{n-2} - \ldots - c_k\beta_{n-k}) = F(n) - F(n) \equiv 0.$$

Corollario. Di conseguenza la soluzione generale (ossia la famiglia di tutte le soluzioni) di un'equazione ricorsiva lineare a coefficienti costanti (2) è data da

$$\{X_n = \xi_n^0 + S_n\}_n$$

dove $\{\xi_n^0\}_n$ è una soluzione particolare (ossia una soluzione qualunque, fissata) dell'equazione (2) ed $\{S_n\}_n$ è lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (3).

• La determinazione di una soluzione particolare della equazione (2) dipende dalla forma del termine noto $F(n)$ e può essere un problema complicato. Diamo la "ricetta" per determinare una soluzione particolare nel caso in cui il termine noto è della forma speciale

$$F(n) = s^n p(n), \qquad s \in \mathbb{R}, \ \ p(n) = p_t n^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0, \ \ p_i \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

ossia dato dalle potenze di un numero reale per un polinomio in n di grado t.

Ricetta. Se il termine noto è del tipo (7), una soluzione particolare dell'equazione (2) va ricercata della forma $\{\xi_n^0\}_n$, con

$$\xi_n^0 = \begin{cases} s^n(q_t n^t + q_{t-1}n^{t-1} + \ldots + q_1 n + q_0), \ q_i \in \mathbb{R}, & \text{se } s \text{ non è radice del polinomio associato} \\ n^m s^n(q_t n^t + q_{t-1}n^{t-1} + \ldots + q_1 n + q_0) & \text{se } s \text{ è una radice del polinomio associato di molteplicità } m, \end{cases}$$

dove il $q(n)$ è anch'esso un polinomio in n, dello stesso grado di $p(n)$. I coefficienti $q_0, q_1, \ldots, q_t$ di $q(n)$ si determinano sostituendo ξ_n^0 nell'equazione, e imponendo che sia appunto soluzione dell'equazione completa.

Esempi

Esempio 1. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Le radici sono reali e distinte, date da $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ed $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pertanto una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione è data dalle successioni di termine generale $\alpha_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ e $\beta_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ e lo spazio delle soluzioni è dato dalle successioni di termine generale

$$S_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ determinano univocamente le costanti A, B: infatti

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 0 \\ S_1 = a_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ A(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Conclusione: la successione cercata è

$$\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}_n$$

ed è la famosa successione di Fibonacci.

Esempio 2. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1$.

Sol. Nello spazio delle soluzioni dell'equazione $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, che è dato dalle successioni di termine generale

$$S_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

questa volta cerchiamo la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1$. Esse determinano univocamente le costanti A, B: infatti

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 1 \\ S_1 = a_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ A(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}),\ B = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}).$$

Conclusione: la successione cercata questa volta è

$$\{\frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{5}}{5})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{5}}{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}_n.$$

Abbiamo già osservato che questa è una successione diversa dalla successione di Fibonacci.

Esempio 3. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 7$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Le radici sono reali e distinte $r_1 = 2$ ed $r_2 = -1$. Lo spazio delle soluzioni è dato dalle soluzioni di termine generale

$$S_n = A2^n + B(-1)^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ determinano univocamente le costanti A, B: infatti

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 2 \\ S_1 = a_1 = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 2 \\ 2A - B = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = 3,\ B = -1.$$

Conclusione: la successione cercata è

$$\{3 \cdot 2^n - (-1)^n\}_n = \{3 \cdot 2^n + (-1)^{n+1}\}_n.$$

Osservazione. Se avessimo imposto le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$, avremmo trovato come soluzione la successione

$$\{\frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n\}_n.$$

Esempio 4. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 2$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Le radici sono reali e coincidenti $r_1 = r_2 = r = 2$. Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione è data dalle successioni di termine generale $\alpha_n = 2^n$ e $\beta_n = n2^n$ e lo spazio delle soluzioni è dato dalle successioni di termine generale

$$S_n = A2^n + Bn2^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ determinano univocamente le costanti A, B:

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 0 \\ S_1 = a_1 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ 2A + 2B = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = 0,\ B = 1.$$

Conclusione: la successione cercata è

$$\{n2^n\}_n.$$

Osservazione. Se avessimo imposto le condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 1$, avremmo trovato come soluzione la successione

$$\{2 \cdot 2^n - \frac{3}{2} \cdot n2^n\}_n.$$

Esempio 5. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = -a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n + a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 + 1 = 0$. Le radici sono complesse coniugate $z = i$ e $\bar{z} = -i$. Scriviamo $z = i$ in forma polare, come $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$, dove $|z| = 1$ e $\theta = arg(z) = \frac{\pi}{2}$. In questo caso, una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione è data dalle successioni di termine generale

$$\alpha_n = |z|^n \cos(n\theta) = \cos(n\frac{\pi}{2}) \quad \text{e} \quad \beta_n = |z|^n \sin(n\theta) = \sin(n\frac{\pi}{2})$$

e lo spazio delle soluzioni è dato dalle successioni di termine generale

$$S_n = P\cos(n\frac{\pi}{2}) + Q\sin(n\frac{\pi}{2}), \qquad P, Q \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ determinano univocamente le costanti P, Q:

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 0 \\ S_1 = a_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P = 0 \\ Q = 1 \end{cases}.$$

Conclusione: la successione cercata è
$$\{\sin(n\frac{\pi}{2})\}_n.$$

Osservazione. Se avessimo imposto le condizioni iniziali $a_0 = 1,\ a_1 = 1$, avremmo trovato come soluzione la successione
$$\{\cos(n\frac{\pi}{2}) + \sin(n\frac{\pi}{2})\}_n.$$

Esempio 6. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 1$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Le radici sono complesse coniugate $z = 1 + i$ e $\bar{z} = 1 - i$. Scriviamo $z = 1 + i$ in forma polare, come $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$, dove $|z| = \sqrt{2}$ e $\theta = arg(z) = \frac{\pi}{4}$. In questo caso, una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione è data dalle successioni di termine generale
$$\alpha_n = |z|^n \cos(n\theta) = \cos(n\frac{\pi}{4}) \quad \text{e} \quad \beta_n = |z|^n \sin(n\theta) = \sin(n\frac{\pi}{4})$$
e lo spazio delle soluzioni è dato dalle successioni di termine generale
$$S_n = P\sqrt{2}^n \cos(n\frac{\pi}{4}) + Q\sqrt{2}^n \sin(n\frac{\pi}{4}), \qquad P, Q \in \mathbb{R}.$$
Le condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 1$ determinano univocamente le costanti P, Q:
$$\begin{cases} S_0 = a_0 = 2 \\ S_1 = a_1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P = 2 \\ P\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + Q\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad P = 2,\ Q = -1.$$
Conclusione: la successione cercata è
$$\{2\sqrt{2}^n \cos(n\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}^n \sin(n\frac{\pi}{4})\}_n.$$

Osservazione. Se avessimo imposto le condizioni iniziali $a_0 = 1,\ a_1 = 1$, avremmo trovato come soluzione la successione
$$\{\cos(n\frac{\pi}{4}) + \sin(n\frac{\pi}{4})\}_n.$$

Esempio 7. Determinare la successione che soddisfa l'equazione ricorsiva $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = n,\ n \geq 2$, con condizioni iniziali $a_0 = 2,\ a_1 = 3$.

Sol. Cominciamo col determinare la soluzione generale dell'equazione ricorsiva lineare omogenea a cofficienti costanti di grado due $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, il cui polinomio associato è dato da $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Le radici sono reali e coincidenti $r_1 = r_2 = r = 1$. Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione è data dalle successioni di termine generale $\alpha_n = 1^n \equiv 1$ e $\beta_n = n1^n = n$ e lo spazio delle soluzioni è dato dalle successioni di termine generale
$$S_n = A + Bn, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$
Adesso determiniamo una soluzione particolare dell'equazione completa:
il termine noto $F(n) = n$, è della forma $s^n \cdot p(n)$, dove $s = 1$ è radice di molteplicità $m = 2$ del polinomio associato all'equazione omogenea e $p(n)$ è un polinomio di grado uno in n. Dunque la soluzione particolare va cercata della forma
$$\xi_n = n^2 \cdot s \cdot q(n), \qquad q(n) = (an + b) \text{ generico polinomio di grado uno in } n.$$

Dunque della forma

$$\xi_n = n^2 \cdot (an + b),$$

dove i coefficienti a e b risulteranno determinati imponendo appunto che ξ_n sia soluzione dell'equazione completa. Infatti abbiamo che $\xi_n - 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2} = n$ se e solo se

$$n^2(an + b) - 2((n-1)^2 \cdot (a(n-1) + b)) + ((n-2)^2 \cdot (a(n-2) + b)) =$$

$$= an^3 + bn^2 - 2(n^2 + 1 - 2n)(an - a + b) + (n^2 + 4 - 4n)(an - 2a + b) =$$

$$= \ldots \qquad \ldots =$$

$$= n(6a - 1) + (2b - 6a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{6},\ b = \frac{1}{2}.$$

La soluzione particolare trovata ha termine generale

$$\xi_n = n^2(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}),$$

e la soluzione generale dell'equazione completa ha termine generale

$$T_n = n^2(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}) + A + Bn, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le costanti A, B sono determinate univocamente dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} T_0 = a_0 = 2 \\ T_1 = a_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = 2,\ B = \frac{1}{3}.$$

Conclusione: la successione cercata è

$$\{n^2(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}) + 2 + \frac{1}{3}n\}_n.$$

Esempio 8. Sia F_n la successione definita per ricorrenza da $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-2} + 2$ con condizioni iniziali $F_1 = 0$ ed $F_2 = 1$. Determinare F_5. Determinare F_n risolvendo la corrispondente equazione alle differenze finite.

Sol. - $F_3 = 2F_2 - F_1 + 2 = 4, \quad F_4 = 2F_3 - F_3 + 2 = 9, \quad F_5 = 2F_4 - F_3 + 2 = 16.$

- Soluzione generale dell'omogenea:
polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ con radice $\lambda = 1$ doppia, da cui

$$\alpha_n = A1^n + Bn1^n = A + nB, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Soluzione particolare:
da cercarsi del tipo $\beta_n = cn^2$. Sostituendo nell'equazione originale si trova $c = 1$, da cui:

$$\beta_n = n^2.$$

Soluzione generale dell'equazione originale:

$$F_n = A + nB + n^2, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $F_1 = 0$ ed $F_2 = 1$, troviamo

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ A + 2B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = 1, \quad B = -2,$$

da cui la soluzione dell'equazione originale con le condizioni iniziali date risulta

$$F_n = 1 - 2n + n^2.$$

Si può controllare che effettivamente $F_5 = 16$, come previsto (cf. (a)).

Esempio 9. Sia F_n la successione definita per ricorrenza da $F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2} + 3^n$ con condizioni iniziali $F_1 = 0$ ed $F_2 = 1$. Determinare F_5. Determinare F_n risolvendo la corrispondente equazione alle differenze finite.

(a) $F_3 = F_2 + 2F_1 + 3^3 = 28, \quad F_4 = F_3 + 2F_2 + 3^4 = 111, \quad F_5 = F_4 + 2F_3 + 3^5 = 410.$

(b) Equazione omogenea associata $F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2}$, con polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda = 2, -1$ e la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$\alpha_n = A2^n + B(-1)^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\beta_n = C3^n$, $C \in \mathbb{R}$, (perché il termine noto è della forma $3^n P(n)$, con $P(n)$ polinomio in n di grado zero, e 3 non è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea). Sostituendo β_n nell'equazione originaria troviamo che $C = \frac{9}{4}$.

La soluzione generale dell'equazione originaria è data da

$$S_n = A2^n + B(-1)^n + \frac{9}{4}3^n, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali determiniamo infine A e B:

$$\begin{cases} F_1 = 2A - B + \frac{27}{4} = 0 \\ F_2 = 4A + B + \frac{81}{4} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{13}{3},\ B = -\frac{23}{12}.$$