

1. Sia p un numero primo.
 - (a) Dimostrare che la cardinalità di Z_p^* è uguale a $p - 1$.
 - (b) Sia $k > 1$ un intero. Dimostrare che la cardinalità di $Z_{p^k}^*$ è uguale a $p^k - p^{k-1}$.
 - (c) Verificare questo fatto per $p = 3$ e $k = 2$ e per $p = 3$ e $k = 3$.
2. Verificare che $\bar{x} = \overline{97}$ e $\bar{y} = \overline{373}$ ammettono inverso moltiplicativo in Z_{2010} e sono uno inverso dell'altro.
3. Determinare se $\bar{x} = \overline{111}$ ammette inverso moltiplicativo in Z_{1010} . Se sì, determinarlo. Determinare quante classi hanno inverso moltiplicativo. Determinare tutte le classi $\bar{x} \in Z_{1010}$ che non ammettono inverso moltiplicativo.
4. Sia $n = 1001$.
 - (a) Verificare che $\bar{x} = \overline{171}$ ammette inverso moltiplicativo in Z_{1001} .
 - (b) Determinare \bar{x}^{-1} fra le seguenti possibilità: $\bar{2}$, $\bar{9}$, $\overline{150}$, $\overline{761}$, $\overline{999}$.
5. Sia $n = 1001$.
 - (a) Verificare che $\bar{x} = \overline{101}$ appartiene a Z_{1001}^* e determinare \bar{x}^{-1} .
 - (b) Determinare la cardinalità di Z_{1001}^* .
6. Sia data la relazione $-173 \cdot 371 + 113 \cdot 568 = 1$.
 - (a) Verificare che $\bar{x} = 113$ appartiene a Z_{371}^* e determinare il suo inverso \bar{x}^{-1} (giustificare bene le risposte).
 - (b) Verificare che $\bar{x} = 371$ appartiene a Z_{568}^* e determinare il suo inverso \bar{x}^{-1} (giustificare bene le risposte).
7. Sia $n = 16$. Fare la lista delle classi resto di Z_{16}^* e per ognuna di esse indicare l'inverso moltiplicativo.
8. Siano $n = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 101$ ed $m = 2^4 \cdot 17 \cdot 37$. Determinare la cardinalità di Z_n^* e di Z_m^* .
9. Sia (G, \cdot) un gruppo.
 - (a) Verificare che l'elemento neutro e di G è unico.
 - (b) Verificare che per ogni $x \in G$, l'inverso x^{-1} di x in G è unico.
10. (*prodotto diretto di gruppi*) Siano (G_1, e_1, \circ) e $(G_2, e_2, *)$ due gruppi.
 - (a) Verificare che il prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$, col prodotto definito da $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 * y_2)$, è un gruppo.
 - (b) Determinare l'elemento neutro di $G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
 - (c) Determinare l'inverso di $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
 - (d) Verificare che se G_1 e G_2 sono abeliani, anche $G_1 \times G_2$ è abeliano.
 - (e) Siano $(G_1, e_1, \circ) = (Z_2, \bar{0}, +)$ e $(G_2, e_2, *) = (Z_3, \bar{0}, +)$. Scrivere la tabella moltiplicativa del gruppo $(Z_2 \times Z_3, +)$.
11. Considerare i seguenti gruppi: per ognuno di essi scrivere la tabella moltiplicativa ed per ogni elemento individuare il suo inverso.
 - (a) $A = \{1, -1, i, -i\}$ con l'operazione data dalla moltiplicazione fra numeri complessi.
 - (b) Z_7 con la somma fra classi resto.
 - (c) $Z_3^* \times Z_4^*$ col prodotto definito da $(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) = (\overline{x \cdot u}, \overline{y \cdot v})$.
 - (d) Z_{11}^* col prodotto fra classi resto.

(e) \mathbf{Z}_{12}^* col prodotto fra classi resto.

12. Sia $p \in \mathbf{N}$ un numero primo. Verificare che in \mathbf{Z}_p vale l'uguaglianza $(\bar{x} + \bar{y})^p = \bar{x}^p + \bar{y}^p$, per ogni $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{Z}_p$ (suggerimento: usare la formula di Newton).
Verificare che per $n = 4$, tale uguaglianza non vale.
13. Dimostrare che $\sum_{\bar{x} \in \mathbf{Z}_n} \bar{x} = \bar{0}$ in \mathbf{Z}_n , per ogni n dispari.
14. Calcolare $(p-1)!$ in \mathbf{Z}_p , per p primo.