1. Dato il sistema di congruenze
$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \bmod 21 \\ 3x \equiv 2 \bmod 71 \end{cases}$$
determinare quali dei seguenti interi $m = 1,\ 11,\ 17,\ 1001$ lo soddisfano.

2. Scrivere un sistema di congruenze che non ammette soluzioni intere anche se le singole congruenze ne ammettono. Scrivere un sistema che soddisfa le ipotesi del Teorema Cinese del Resto. Dimostrare il Teorema Cinese del Resto (sugg. risolvere per sostituzione etc...). Verificare che un sistema di congruenze della forma
$$\begin{cases} x \equiv a \bmod n \\ x \equiv b \bmod m \end{cases}$$
ammette soluzioni intere se e solo se il $mcd(n, m)$ divide $b - a$ (sugg. risolvere per sostituzione etc...).

3. Determinare tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di congruenze
$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \bmod 14 \\ 3x \equiv 2 \bmod 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x \equiv 0 \bmod 6 \\ 3x \equiv 6 \bmod 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x \equiv 2 \bmod 4 \\ 3x \equiv 0 \bmod 6. \end{cases}$$

4. Determinare tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze
$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \bmod 22 \\ 3x \equiv 2 \bmod 7. \end{cases}$$

5. Determinare tutti gli interi positivi di tre cifre decimali che soddisfano il sistema di congruenze
$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \bmod 11 \\ 3x \equiv 2 \bmod 7. \end{cases}$$

6. Dimostrare che la somma di due numeri pari è pari, la somma di due numeri dispari è pari e la somma di un numero pari e un numero dispari è dispari. Dedurne la tabella dell'addizione fra le classi resto modulo 2.
Dimostrare che il prodotto di due numeri pari è pari, il prodotto di due numeri dispari è dispari e il prodotto di un numero pari e un numero dispari è pari. Dedurne la tabella del prodotto fra le classi resto modulo 2.

7. Dimostrare che la classe resto modulo 10 di un intero è data dall'ultima cifra e che la classe resto modulo 100 è data dalle ultime due cifre.

8. Sia n un intero che diviso per 7 dà resto 5 e sia m un intero che diviso per 7 dà resto 2. Dividendo $n+m$ per 7, che resto troviamo? Dividendo $n \cdot m$ per 7, che resto troviamo? Giustificare bene le risposte.

9. Scrivere la tabella completa della somma fra le classi resto modulo 7 e la tabella completa del prodotto fra le classi resto modulo 7.

10. Sia n un intero che diviso per 11 dà resto 5 e sia m un intero che diviso per 11 dà resto 9. Dividendo $n + m$ per 11, che resto troviamo? Dividendo $n \cdot m$ per 11, che resto troviamo? Giustificare bene le risposte.

11. Scrivere la tabella completa della somma fra le classi resto modulo 6 e la tabella completa del prodotto fra le classi resto modulo 6.

12. A partire dalle tabelle calcolate nell'esercizio 4, per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_7$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_7$, tale che $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$. Per quali $\bar{x} \in \mathbf{Z}_7$ esiste $\bar{y} \in \mathbf{Z}_7$ per cui vale $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$?

13. A partire dalle tabelle calcolate nell'esercizio 6, per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_6$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_6$, tale che $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$. Per quali $\bar{x} \in \mathbf{Z}_6$ esiste $\bar{y} \in \mathbf{Z}_6$ per cui vale $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$?

14. Sia $n = 17$ e sia $\mathbf{Z}_{17} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{15}, \overline{16}\}$ l'insieme delle classi resto modulo 17.
    (a) In $\mathbf{Z}_{17}$ calcolare
    $$\overline{16} + \overline{10}, \quad \overline{16} \cdot \overline{10}, \quad 4 \cdot \overline{11} + \overline{10}^2$$
    (b) Per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$ determinare $\bar{y} \in \mathbf{Z}_{17}$, tale che $\bar{x} + \bar{y} = \bar{0}$.
    (c) Data $\bar{7} \in \mathbf{Z}_{17}$, determinare, se esiste, $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$ tale che $\bar{7} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ (provare tutti i prodotti $\bar{7} \cdot \bar{x}$ al variare di $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{17}$).