1. Sia $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ il prodotto di primi distinti $p_1, \ldots, p_k$ e sia $n = P + 1$. Chi è il resto della divisione di n per uno qualsiasi dei primi p_i, per $i = 1, \ldots, k$? Prendere spunto da questo fatto per dimostrare che i numeri primi sono infiniti.

2. È vero che $n = 56$ divide $m = -392$ e che $n = -56$ divide $m = -392$? Spiegare la risposta.

3. Determinare il massimo comune divisore fra $m = 4567$ ed $n = -668$, fra $m = -4567$ ed $n = 668$ e fra $m = -4567$ ed $n = -668$.

4. Sia $n \in \mathbf{Z}$. Calcolare $mcd(n+1, n)$ e $mcd(n+2, n)$ (nel secondo caso, esaminare separatamente $n = 2k$ pari e $n = 2k + 1$ dispari).

5. Sia data l'equazione omogenea $4x + 2y = 0$ e sia S l'insieme di *tutte* le sue soluzioni intere. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid (2k, -4k),\ k \in \mathbf{Z}\}$.
   (a) Verificare che A è un sottoinsieme dell'insieme S.
   (b) Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $4x + 2y = 0$.
   (c) Dimostrare che A è un sottoinsieme *proprio* di S (in altre parole esibire almeno una soluzione dell'equazione che non appartiene ad A).
   (d) Determinare tutte le soluzioni intere delle equazioni $20x + 10y = 10$ e $2x + y = 1$.

6. Siano dati $a = 1009$ e $b = 1013$.
   (a) Calcolare il massimo comune divisore $\mathrm{mcd}(a, b)$.
   (b) Determinare una coppia di interi $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ tali che $ax_0 + by_0 = mcd(a, b)$.
   (c) Determinare, se esiste, una coppia di interi $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ tali che $ax_0 + by_0 = 5$.
   (d) Ripetere (a)(b)(c) per $a = 4657$ ed $b = 345$ e poi per $a = 567$ ed $b = 789$.

7. Determinare un intero c a piacere in modo che l'equazione $128x + 136y = c$ ammetta soluzioni intere. Per quel valore di c, determinarle tutte.

8. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $56789x + 34567y = 2$.

9. A partire dalla relazione $623 \cdot 30 - 45 \cdot 413 = 105$, dire quali possono essere i valori di $mcd(623, 413)$ e di $mcd(30, 413)$ (senza calcolarli esplicitamente).

10. A partire dalla relazione $62 \cdot 61728 - 97 \cdot 39455 = 1$, calcolare:

$$mcd(62, 97), \quad mcd(62, 39455), \quad mcd(61728, 97), \quad mcd(61728, 39455).$$

Determinare una soluzione intera di ognuna delle equazioni

$$62x + 39455y = 2, \qquad 62x + 97y = 5, \qquad 61728x + 39455y = 10.$$