Algebra e Logica 2015. Esercizi 4. Relazioni di ordine.

1. Sull'insieme $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ definiamo la seguente relazione: mRn se $m|n$, cioè se m *divide* n (per definizione, m divide n se esiste $k \in \mathbf{Z}$ per cui vale $n = km$). Verificare che R è una relazione di ordine su $\mathbf{N}$. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $\mathbf{N}$.

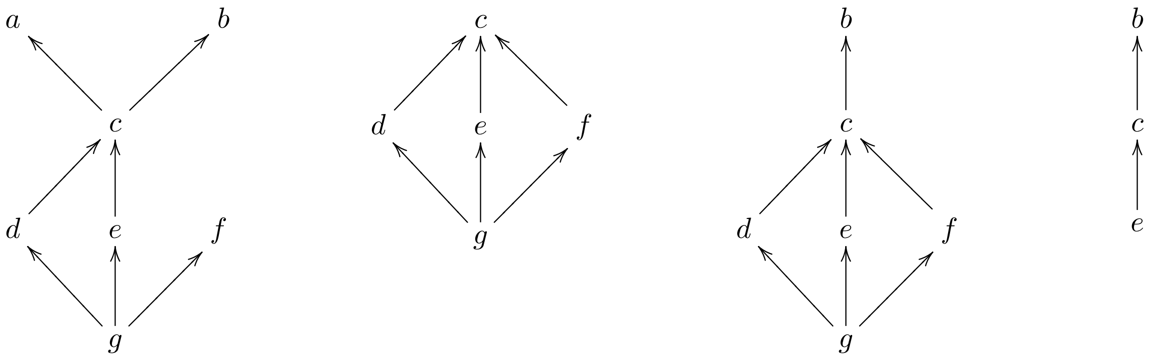
2. Sia $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ l'insieme dei divisori di 15 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Elencare tutti gli elementi di R in $D_{15} \times D_{15}$.

3. Sia $D_{25} = \{1, 5, 25\}$ l'insieme dei divisori di 25 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Elencare tutti gli elementi di R in $D_{25} \times D_{25}$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su D_{25}.

4. Sia $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$ l'insieme della parti di $\{a, b\}$ con la relazione di ordine data dalla contenenza: ARB se $A \subset B$. Elencare tutti gli elementi di R in $X \times X$. Disegnare il diagramma di Hasse di R. Determinare se la relazione R è una relazione di ordine totale su $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$.

5. Sia $X = \{(1, 2, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 3, 0), (2, 1, 1), (4, 1, 1), (3, 3, 3)\}$ con l'ordinamento lessicografico. Disegnare il diagramma di Hasse associato.

6. Siano dati i seguenti diagrammi



e supponiamo che siano i diagrammi di Hasse di altrettante relazioni di ordine $R_1, \dots, R_4$ definite rispettivamente sugli insiemi $X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $X_2 = \{c, d, e, f, g\}$, $X_3 = \{b, c, d, e, f, g\}$, $X_4 = \{b, c, e\}$.

   (a) Determinare tutti gli elementi di R_2 in $X_2 \times X_2$ e di R_4 in $X_4 \times X_4$.

   (b) Determinare $\{x \in X_1 \mid xR_1c\}$ e $\{x \in X_3 \mid xR_3c\}$.

   (c) Per ognuno degli insiemi ordinati (X_i, R_i), per $i = 1, \dots, 4$, determinare gli elementi massimali, gli elementi minimali ed eventuali massimi e minimi. Giustificare bene le risposte in base alle definizioni corrispondenti.

7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data da: aRb se $a \leq b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A. e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in A$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

8. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di A. e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in A$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Dire se R definisce un ordinamento totale su A.

9. Sia D_{30} l'insieme dei divisori di 30 con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Disegnare il diagramma di Hasse di D_{30}. e per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in D_{30}$ determinare, se esistono, $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

10. Sia D_{36} l'insieme dei divisori di 36 con la relazione di ordine data dalla divisibilità: aRb se $a \mid b$. Sia $S = \{4, 6\} \subset D_{36}$. Con quali elementi di D_{36} è in relazione 6?
   (b) Determinare tutti i maggioranti e tutti i minoranti di S in D_{36}.
   (c) Determinare, se esistono, $\inf(S)$, $\sup(S)$, $max(S)$, $min(S)$.