Algebra e Logica 2015. Esercizi 2. Cardinalità, induzione.

1. Sia $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \neq 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dimostrare che A è numerabile (suggerimento: imitare la dimostrazione del fatto che $\mathbf{Z}$ è numerabile).
2. Siano A e B insiemi con la stessa cardinalità. Verificare che se A è numerabile, anche B è numerabile.
3. Determinare quali dei seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità:
$$\mathbf{N}, \quad A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10\}, \quad \mathbf{N} \cup \mathbf{N}, \quad B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3k,\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad \mathcal{P}(\mathbf{N}).$$
(Giustificare bene le risposte).
4. Determinare quali dei seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità:
$$\mathbf{R}, \quad \mathcal{P}(\mathbf{R}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))).$$
(Giustificare bene le risposte).
5. Sia A un insieme con n elementi e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.
   (a) Determinare esplicitamente $\mathcal{P}(A)$ e $|\mathcal{P}(A)|$ quando $|A| = 0, 1, 2, 3$.
   (a) Dimostrare che $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
   (Suggerimento: osservare che i sottoinsiemi di A con k elementi sono $\binom{n}{k}$ e applicare la formula del binomio di Newton a $(1+1)^n =$????. Alternativamente, usare il principio di induzione).
6. Siano dati $A = \{x, y, z, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:
$$X = \{f : A \to B\}, \quad Y = \{f : A \to B \mid f(x) \neq f(y)\},$$
$$Z = \{f : A \to B \mid \text{iniettive}\}, \quad W = \{f : A \to B \mid f(x) = f(y) = 1\}.$$
7. Siano dati $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:
$$U = \{f : A \to B\}, \quad V = \{f : A \to B \mid f(b) = 1,\ f(c) = 2\}, \quad T = \{f : A \to B \mid f(b) = f(c)\}.$$
8. Calcolare il coefficiente di x^4y^2 e di x^3y^3 in $(x+y)^6$.
9. Usando il principio di induzione, dimostrare le seguenti identità:
   (a) $1 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$;
   (b) per ogni $n \in \mathbf{N}$, il numero $n^2 + 5n + 6$ è pari;
   (c) $2^n > n^2$, per ogni intero $n \geq 5$;
   (d) $n! \geq 2^{n-1}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.
10. Sia $0 < a < 1$.
   (a) Usando il principio di induzione, dimostrare che
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$
   (b) Dedurre da (a) che $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.
   (sugg. osservare che se $1 < a < 1$, allora $a^k \to 0$, per $k \to \infty$.)
   (c) Calcolare
$$\sum_{k=0}^{5} a^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a^k,$$
   per $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{10}$ e per $a = \frac{1}{10^p}$, dove p è un numero naturale fissato.

(d) Sia $x = 0,\overline{X_1 \dots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \dots X_p}$:

$$x = X_1 \dots X_p(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \dots).$$

Sfruttando (c), scrivere x in forma di frazione.

(e) Sia $x = Y_1 \dots Y_m, Z_1 \dots Z_n\overline{X_1 \dots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \dots X_p}$. Generalizzando (d), scrivere x in forma di frazione.

(f) Scrivere $0,\overline{9}$ in forma di frazione.

(g) Verificare che ogni numero razionale ha un'espansione decimale periodica della forma

$$x = Y_1 \dots Y_m, Z_1 \dots Z_n\overline{X_1 \dots X_p}.$$

11. Sia $A = \{x, y, z\}$. Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$A \cap (A \setminus A), \quad A \cup (A \cap A), \quad \mathcal{P}(A), \quad A \cup \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A), \quad \mathcal{P}(A \times A).$$

12. Siano A_1, A_2 e A_3 tre insiemi di cardinalità $|A_1| = 100$, $|A_2| = 1000$, $|A_3| = 10000$. Calcolare la cardinalità di $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nei seguenti casi:
    (a) sono contenuti uno nell'altro $A_1 \subset A_2 \subset A_3$;
    (b) sono disgiunti $A_i \cap A_j = \emptyset$, per $i \neq j$;
    (c) si ha $|A_1 \cap A_2| = 10$ e $A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$.
13. Qual è la cardinalità dell'insieme $X = \{a, b, \{b\}, \{b, c\}, \{\{c\}\}\}$?