1. In un'algebra Booleana $(B, +, \cdot, ')$ siano date le espressioni booleane
$$E: \ (x+y)z' + xz \qquad F: \ xy' + xyz.$$
   (a) A quali espressioni corrispondono nell'algebra di Boole del calcolo proposizionale?
   (b) Sono logicamente equivalenti?

2. Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale. Enunciare i seguenti fatti:
   - le operazioni $\wedge, \vee$ sono *associative*;
   - le operazioni $\wedge, \vee$ hanno la *proprietà dell'assorbimento*;
   - le operazioni $\wedge, \vee$ hanno la *proprietà dell'idempotenza*.

3. Considerare su $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ la seguente relazione:
$$A \text{ “} \leq \text{” } B \quad \text{se} \quad A \Rightarrow B.$$
   (a) Verificare che A “ $\leq$ ” B è logicamente equivalente a $A \wedge B \Leftrightarrow A$ ed a $A \vee B \Leftrightarrow B$.
   (b) Dati $A, B \in \mathcal{P}$, chi sono $\sup\{A, B\}$ ed $\inf\{A, B\}$?
   (c) Verificare che la tautologia $\mathcal{T}$ e la contraddizione $\mathcal{C}$ sono rispettivamente massimo e minimo in $\mathcal{P}$.

4. Siano X, Y e Z insiemi. Siano dati gli enunciati
$$A: \ \text{“}x \in X\text{”}, \qquad B: \ \text{“}x \in Y\text{”}, \qquad C: \ \text{“}x \in Z\text{”}.$$
   (a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici $\wedge$, $\vee$, $\neg$ esprimere i seguenti fatti:
   $x \notin X$; $x \in Y \cup Z$; $x \notin Y \cup Z$; $x \in X \cap Y \cap Z$; $x \in X \setminus Y \cap Z$; $x \notin X \cap Y$;
   $x \in X \cap (Y \cup Z)$; $x \in X \cup (Y \cap Z)$; $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; $x \in (X \setminus Y) \cap (X \cap Z)$.
   (b) Cosa dicono su x gli enunciati
   $\neg A \wedge B$; $A \wedge (B \vee \neg C)$; $\neg(A \vee (B \wedge C))$; $A \vee \neg(B \wedge C))$; $\neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$??
   Illustrare i vari casi con dei disegni.

5. Determinare la tavola della verità di ciascuna delle seguenti forme proposizionali:
   (a) $p \wedge (\neg q \vee q)$; (b) $\neg p \vee (q \Rightarrow p)$; (c) $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge r)$;
   (d) $(p \vee q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$; (e) $(p \Leftrightarrow q) \vee (\neg q \vee p)$; (f) $\neg(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$;

6. È vero che dati tre insiemi A, B, C vale l'implicazione $\begin{cases} A \cup C = B \cup C \\ A \cap C = B \cap C \end{cases} \Rightarrow \quad A = B$??
   Dimostrarlo o esibire un controesempio.

7. Verificare che $\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \bigvee \neg(\neg r \vee p) \vee (\neg s \vee p)$ è una tautologia. Se consideriamo l'espressione booleana corrispondente nell'algebra di Boole $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ e la semplifichiamo, cosa troviamo alla fine?

8. Sia dato l'enunciato $\mathcal{A}: \ (A \vee B) \wedge \neg B$, per $A, B \in \{V, F\}$.
   (a) Usando i quantificatori $\forall$, $\exists$ esprimere il seguente fatto:
   “$\mathcal{A}$ non è né una tautologia né una contraddizione”.
   (b) Scrivere la sua negazione.
   (c) Usare la tabella di verità di $\mathcal{A}$ per controllare quale dei due enunciati è vero.

9. Siano x, y variabili *reali non negative*. Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire “a parole”, determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori). Giustificare bene le risposte con esempi numerici.
   (a) $\exists\, x\ ((x^2 < 10) \wedge (|3 - x| > 2))$;
   (b) $\forall x((x \neq 4) \Rightarrow (x - 5 > 1))$;
   (c) $\forall x \exists y(x + y = 0)$;
   (d) $\exists x \forall y\ (xy) = 0)$;

10. Siano x, y variabili *intere*. Sia $Q(x, y)$ l'enunciato “$x + y = x - y$”.
    Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire “a parole”, determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori). Giustificare bene le risposte con esempi numerici.
   (a) $\forall y\ Q(1, y)$;
   (b) $\exists x \exists y\ Q(x, y)$;
   (c) $\forall y \exists x\ Q(x, y)$;
   (d) $\exists x \forall y\ Q(x, y)$;
   (e) $\exists y \forall x\ Q(x, y)$;

11. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A,\ B,\ C \text{ insiemi.} \quad \forall A, B, C: \quad A \cap B \neq \emptyset \bigwedge B \cap C \neq \emptyset \ \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset.$$

   (a) Determinare se è vero o falso.
   (b) Scrivere la sua negazione.
   (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione, ed esibire un controesempio esplicito.

12. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A,\ B,\ C \text{ insiemi.} \quad \forall C: \quad \big(A \cap C = B \cap C\big) \bigwedge \big(A \cup C = B \cup C\big) \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

   (a) Determinare se è vero o falso.
   (b) Scrivere la sua negazione.
   (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione (esibire un controesempio esplicito).

13. Siano dati gli insiemi X, Y, Z e gli enunciati

$$A: \quad x \in X, \qquad B: \quad x \notin Y, \qquad C: \quad x \in Z.$$

   (a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici $\wedge$, $\vee$, $\neg$, esprimere il fatto che

$$x \in (X \cap Y) \cup (Z \cap Y).$$

   (b) A partire da $(A \wedge B) \vee (\neg(\neg C \wedge A))$, determinare se $x \in X \cap Z$.