

1. Sia $A = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \neq 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dimostrare che A è numerabile (suggerimento: imitare la dimostrazione del fatto che \mathbf{Z} è numerabile).
2. Siano A e B insiemi con la stessa cardinalità. Verificare che se A è numerabile, anche B è numerabile.
3. Determinare quali dei seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità:

$$\mathbf{N}, \quad A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10\}, \quad \mathbf{N} \cup \mathbf{N}, \quad B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}, \quad \mathcal{P}(\mathbf{N}).$$

(Giustificare bene le risposte).

4. Determinare quali dei seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità:

$$\mathbf{R}, \quad \mathcal{P}(\mathbf{R}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))).$$

(Giustificare bene le risposte).

5. Sia A un insieme con n elementi e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A . Dimostrare che $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. (Suggerimento: osservare che i sottoinsiemi di A con k elementi sono $\binom{n}{k}$ e applicare la formula del binomio di Newton a $(1 + 1)^n = \text{????}$). Determinare esplicitamente $\mathcal{P}(A)$ e $|\mathcal{P}(A)|$ quando $|A| = 0, 1, 2, 3, 4$.
6. Usando il principio di induzione, dimostrare le seguenti identità:
 - (a) $1 + (2)^2 + (3)^2 + \dots + (n)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$;
 - (b) per ogni $n \in \mathbf{N}$, il numero $n^2 + 5n + 6$ è pari;
 - (c) $2^n > n^2$, per ogni intero $n \geq 5$;
 - (d) $n! \geq 2^{n-1}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.
7. Sia $0 < a < 1$.
 - (a) Usando il principio di induzione, dimostrare che

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

- (b) Dedurre da (a) che $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.
(sugg. osservare che se $1 < a < 1$, allora $a^k \rightarrow 0$, per $k \rightarrow \infty$.)
- (c) Calcolare

$$\sum_{k=0}^5 a^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a^k,$$

per $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{10}$ e per $a = \frac{1}{10^p}$, dove p è un numero naturale fissato.

- (d) Sia $x = 0, \overline{X_1 \dots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \dots X_p}$:

$$x = X_1 \dots X_p \left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \dots \right).$$

Sfruttando (c), scrivere x in forma di frazione.

- (e) Sia $x = Y_1 \dots Y_m, Z_1 \dots Z_n \overline{X_1 \dots X_p}$ un numero reale la cui espansione decimale è periodica di periodo $\overline{X_1 \dots X_p}$. Generalizzando (d), scrivere x in forma di frazione.
- (f) Scrivere $0,9$ in forma di frazione.
- (g) Verificare che ogni numero razionale ha un'espansione decimale periodica della forma

$$x = Y_1 \dots Y_m, Z_1 \dots Z_n \overline{X_1 \dots X_p}.$$