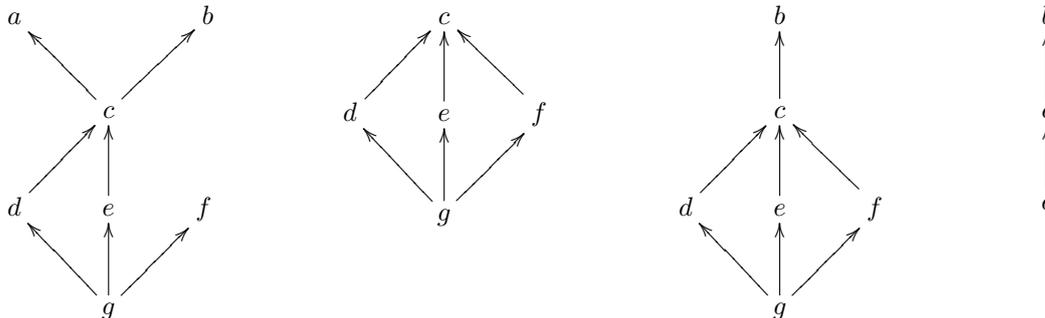
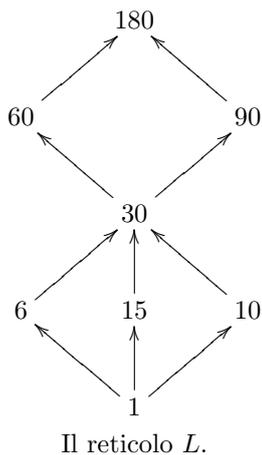


1. Quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati sono reticoli e quali no (spiegare bene le risposte):



2. Sia $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $S = \{\{a, b\}, \{b\}, \emptyset, \{c, d\}, X\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di contenenza \subset . Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se S è un reticolo.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 63\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se X è un reticolo.
4. Si consideri il reticolo $L = \{1, 6, 10, 15, 30, 60, 90, 180\}$ con la relazione di ordine data dalla divisibilità, e munito delle operazioni di inf e sup indotte da tale relazione, per semplicità indicate con $a \wedge b = inf(a, b)$ e $a \vee b = sup(a, b)$.



(a) Calcolare

$$60 \wedge 90 \wedge 15, \quad 60 \wedge (90 \vee 15), \quad 6 \vee (15 \wedge 30), \quad (6 \wedge 15) \vee (10 \wedge 60).$$

- (b) Verificare che si tratta di un reticolo limitato, specificando chi sono massimo e minimo.
- (c) Determinare se è un reticolo complementato, specificando quali elementi hanno complemento, se tale complemento è unico, ed eventualmente quali elementi non hanno complemento.
- (d) Determinare, se ci sono, terne di elementi $a, b, c \in L$ e $l, m, n \in L$ per cui

$$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad l \wedge (m \vee n) \neq (l \wedge m) \vee (l \wedge n).$$

- (e) Sia $S = \{10, 15, 30, 60\} \subset L$. Determinare l'insieme dei maggioranti di S in L e determinare se S ha sup in L . Se si', determinare se si tratta di un massimo.
- (f) Determinare l'insieme dei minoranti di S in L e determinare se S ha inf in L . Se si', determinare se si tratta di un minimo.

5. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X .
 - (a) Dimostrare che le operazioni di reticolo hanno la proprietà dell'assorbimento.
 - (b) Dimostrare che per le operazioni di reticolo vale l'idempotenza.
 - (c) Dimostrare che le operazioni di reticolo sono distributive.
6. Sia $(\mathbf{N}, |)$ l'insieme dei numeri naturali con la relazione di ordine parziale data dalla divisibilità.
 - (a) Verificare che si tratta di un reticolo.
 - (b) Dire se si tratta o meno di un reticolo limitato, complementato, distributivo (spiegare bene le risposte).
 - (c) Cosa possiamo dire di $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \subset)$? Spiegare bene.
7. Siano $2 \leq p < q < r$ numeri primi distinti. Si considerino i seguenti insiemi con l'ordinamento parziale dato dalla divisibilità:

$$(D_{pqr}, |) \quad (D_{p^2r}, |) \quad (D_{p^2q^2}, |) \quad (D_{pqr^2}, |).$$

- (a) Disegnare i corrispondenti diagrammi di Hasse.
- (b) Dire quali fra essi sono reticoli limitati, complementati e distributivi, spiegando bene le risposte.
- (c) Costruire un esempio concreto di ognuna delle quattro situazioni e rifare quanto fatto sopra.

Questi ultimi esercizi riguardano la prima parte della lezione di mercoledì 21 dicembre.

8. Siano dati i reticoli

$$(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset), \quad (D_{14}, |), \quad (D_{70}, |), \quad (\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset).$$

Determinare quali di essi sono isomorfi. Nel caso in cui due reticoli siano isomorfi, determinare tutti i possibili isomorfismi.

9. Siano dati i reticoli

$$(D_{30}, |), \quad (D_{20}, |), \quad (D_{18}, |), \quad (\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset), \quad (D_{105}, |).$$

Determinare quali di essi sono isomorfi. Nel caso in cui due reticoli siano isomorfi, determinare tutti i possibili isomorfismi.