F. Gavarini, G. Halbout

"Tressages des groupes de Poisson formels à dual quasitriangulaire"

Journal of Pure and Applied Algebra **161** (2001), no. 2, 295–307

DOI: 10.1016/S0022-4049(00)00099-2

also translated in English as

"Braidings of Poisson groups with quasitriangular dual"

INTRODUCTION

Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie sur un corps k de caractéristique zéro et $\mathfrak{g}^*$ sa bigèbre de Lie duale (topologique, en général). L'algèbre $F[[\mathfrak{g}^*]]$ des fonctions sur le groupe de Poisson formel associé à $\mathfrak{g}^*$ est une k-algèbre de Hopf topologique. Dans ce travail, nous démontrons que la donnée d'une structure quasitriangulaire sur $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire d'une r-matrice, $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$, solution de l'équation de Yang-Baxter classique) induit un tressage sur l'algèbre de Hopf $F[[\mathfrak{g}^*]]$ (la définition d'un tressage est donnée au paragraphe 1). Nous étendons ainsi au cas général les résultats obtenus pour les algèbres de Kac-Moody de type fini ou affine par Reshetikhin [Re] et le premier auteur [G1,G2].

Notre démonstration repose sur les quantifications des algèbres enveloppantes et des algèbres de fonctions sur les groupes formels. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Hopf-co-Poisson. Dans ce cadre, Etingof et Kazhdan [EK] ont montré l'existence d'une quantification de $U(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire d'une $k[[h]]$-algèbre de Hopf topologique $U_h(\mathfrak{g})$ vérifiant:

(a) les $k[[h]]$-modules $U_h(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})[[h]]$ sont isomorphes;

(b) l'algèbre de Hopf-co-Poisson $U_h(\mathfrak{g}) \otimes_{k[[h]]} k$ obtenue par spécialisation à $h = 0$ est isomorphe à $U(\mathfrak{g})$.

À partir d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on peut construire *a priori* plusieurs quantifications $U_h(\mathfrak{g})$. A l'intérieur de chacune d'elles, Drinfeld [D3] construit une sous-algèbre de Hopf $F_h[[\mathfrak{g}^*]]$ dont la spécialisation à $h = 0$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf-Poisson $F[[\mathfrak{g}^*]]$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit en outre quasitriangulaire, munie d'une r-matrice $r \in \wedge^2\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Etingof et Kazhdan ont montré, dans [EK], que cette structure quasitriangulaire pouvait elle aussi être quantifiée: une des quantifications $U_h(\mathfrak{g})$ possède une R-matrice universelle $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ (produit tensoriel topologique) qui, dans l'identification de $k[[h]]$-modules $U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}) \simeq (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))[[h]]$, s'écrit sous la forme $R_h \equiv 1 \otimes 1 + hr \pmod{h^2}$. Nous prouvons dans ce cadre que l'action de R_h par automorphisme intérieur dans $U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ stabilise la sous-algèbre $F_h[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F_h[[\mathfrak{g}^*]]$ et induit par spécialisation un opérateur $\mathfrak{R}_0$ sur $F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$. Les propriétés algébriques de la R-matrice universelle R_h font que $\mathfrak{R}_0$ est un opérateur de tressage, ce qui démontre le résultat.

Dans la première partie de ce papier, nous rappellerons les définitions et notions utiles pour notre travail. Dans la seconde partie, nous énoncerons précisément les résultats principaux et donnons le schéma de leurs démonstrations. Dans la troisième partie, on trouvera la preuve, essentiellement combinatoire, du théorème technique 2.1.

— — —

INTRODUCTION

Let $\mathfrak{g}$ be a Lie Lie bialgebra over a field k of characteristic zero; let $\mathfrak{g}^*$ be the dual Lie bialgebra of $\mathfrak{g}$; finally denote $F[[\mathfrak{g}^*]]$ the algebra of functions on the formal Poisson group associated to $\mathfrak{g}^*$. If $\mathfrak{g}$ is quasitriangular, endowed with the r–matrix r, this gives $\mathfrak{g}$ some additional properties. A question then rises: what new structure one obtains on the dual bialgebra $\mathfrak{g}^*$? In this work we shall show that the topological Poisson Hopf algebra $F[[\mathfrak{g}^*]]$ is a braided Poisson algebra (we'll give the definition later on). This was already proved for $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,k)$ by Reshetikhin (cf. [Re]), and generalised to the case where $\mathfrak{g}$ is Kac-Moody of finite (cf. [G1]) or affine (cf. [G2]) type by the first author.

In order to prove the result, we shall use quantization of universal enveloping algebras. After Etingof-Kazhdan (cf. [EK]), each Lie bialgebra admits a quantization $U_h(\mathfrak{g})$, namely a topological Hopf algebra over $k[[h]]$ whose specialisation at $h=0$ is isomorphic to $U(\mathfrak{g})$ as a co-Poisson Hopf algebra; in addition, if $\mathfrak{g}$ is quasitriangular and r is its r–matrix, then such a $U_h(\mathfrak{g})$ exists which is quasitriangular too, as a Hopf algebra, with au R–matrix $R_h \; (\in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}))$ such that $R_h \equiv 1 + r\,h \mod h^2$ (where we have identified, as vector spaces, $U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})[[h]]$).

Now, after Drinfel'd (*cf.* [Dr]), for any quantised universal enveloping algebra U one can define also a certain Hopf subalgebra U' such that, if the semiclassical limit of U is $U(\mathfrak{g})$ (with $\mathfrak{g}$ a Lie bialgebra), then the semiclassical limit of U' is $F[[\mathfrak{g}^*]]$. In our case, when considering $U_h(\mathfrak{g})'$ one can observe that the R–matrix does not belong, *a priori*, to $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$; nevertheless, we prove that its adjoint action $\mathfrak{R}_h := \mathrm{Ad}(R_h) : U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$, $x \otimes y \mapsto R_h \cdot (x \otimes y) \cdot R_h^{-1}$, stabilises $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$, hence it induces by specialisation an operator $\mathfrak{R}_0$ on $F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$. Finally, the properties which make R_h an R–matrix imply that $\mathfrak{R}_h$ is a braiding operator, whence the same holds for $\mathfrak{R}_0$: thus the pair $\big(F[[\mathfrak{g}^*]], \mathfrak{R}_0\big)$ is braided Poisson algebra.

— — — — —

References

[CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Di] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[D1] V. G. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations.*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), 285–287.

[D2] V. G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), 1060–1064.

[D3] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. Intern. Congress of Math. (Berkeley, 1986), 1987, pp. 798–820.

[EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. (New Series) **2** (1996), 141.

[G1] F. Gavarini, *Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum groups at Roots of 1*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 95–117.

[G2] F. Gavarini, *The R-matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1* (to appear in Jour. Pure Appl. Algebra).

[On] A. L. Onishchik, *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Re] N. Reshetikhin, *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 79–99.

[Tu] V. G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527–553.

[WX] A. Weinstein, P. Xu, *Classical Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation*, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 309–343.