Fabio GAVARINI

“Quantizzazione di gruppi di Poisson”

INTRODUCTION

The content of this Ph. D. thesis can be found, in English, also in the journal article:

F. Gavarini, “Quantization of Poisson groups”,
Pacific Journal of Mathematics **186** (1998), no. 2, 217–266.

In short, the content of the latter is the following.

Let G^τ be a connected simply connected semisimple algebraic group, endowed with generalized Sklyanin-Drinfel’d structure of Poisson group; let H^τ be its dual Poisson group. By means of quantum double construction and dualization via formal Hopf algebras, we construct new quantum groups $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ — dual of the *multiparameter* quantum group $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})$ built upon $\mathfrak{g}^\tau$, with $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ — which yield infinitesimal quantization of H^τ and G^τ . We study their specializations at roots of 1 (in particular, their classical limits), thus discovering new quantum Frobenius morphisms. The whole description dualize for H^τ what was known for G^τ , completing the quantization of the pair (G^τ, H^τ) .

The present thesis is (obviously) more detailed than the article version. In particular, the thesis first develops the cases $\tau = 0$, which means simply that one drops the multiparameter φ and works with the more familiar (one-parameter) quantum groups $U_q(\mathfrak{g})$ and their duals $U_q(\mathfrak{h})$. The second step then is to move to the multiparameter case, making the necessary improvements to the argument used in the previous, simpler case.

— — — — —

INTRODUZIONE

“Dualitas dualitatum
et omnia dualitas”

N. Barbecue, “Scholia”

Il presente lavoro tratta il problema della quantizzazione dei gruppi di Poisson, presentando una costruzione esplicita di una quantizzazione infinitesimale per una vasta classe di gruppi di Poisson algebrici affini; tale costruzione e i risultati ottenuti gettano nuova luce sulla relazione tra dualità di Hopf e dualità di Poisson, e forniscono nuove dimostrazioni di alcuni risultati già noti.

Nel seguito per *dualità di Hopf* intendiamo la dualità che intercorre tra le due algebre di Hopf (quella delle funzioni regolari $F[G]$ e quella involupante universale $U(\mathfrak{g})$) associate ad un gruppo algebrico (eventualmente di Poisson) G , mentre per *dualità di Poisson* intendiamo la dualità che intercorre tra un gruppo (algebrico) di Poisson G e il suo gruppo di Poisson duale G^* .

Ricordiamo che, dato un gruppo algebrico G , esistono due oggetti algebrici associati ad esso, cioè la sua algebra delle funzioni regolari $F[G]$ e la sua algebra involuante universale $U(\mathfrak{g})$, quando la caratteristica del campo base k sia zero (che è il caso che considereremo) e $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ è l'algebra di Lie tangente a G , o la sua iperalgebra $Hy(G)$, quando la caratteristica del campo base k sia positiva: queste sono entrambe algebre di Hopf su k , con un accoppiamento di Hopf naturale non degenero $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ tra loro, così che $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$ possono essere pensate come algebre di Hopf *duali* l'una dell'altra. Inoltre, invece di $F[G]$ si può considerare l'algebra delle funzioni $F^\infty[G]$ del germe di gruppo associato a G (o, in breve, “il gruppo formale $F^\infty[G]$ ”), che è un'algebra di Hopf formale (cfr. §1.1 per la definizione) che estende $F[G]$, e l'accoppiamento $F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ di algebre di Hopf formali che estende $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ (in effetti $F^\infty[G] = U(\mathfrak{g})^*$).

Quando G è un gruppo algebrico di Poisson, l'algebra di Lie $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ ha una struttura di bialgebra di Lie: inoltre esiste un altro gruppo algebrico di Poisson H , detto “(il) gruppo di Poisson duale di G ”, con $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H) \cong \mathfrak{g}^*$ come spazi vettoriali su k ; in aggiunta si ha un accoppiamento non degenero di bialgebre di Lie $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow k$, così che $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ possono essere viste come bialgebre di Lie *duali* l'una dell'altra. Infine, la struttura di Poisson di G , risp. H , si riflette in una struttura di algebra di Hopf Poisson su $F[G]$, risp. $F[H]$, e in una struttura di coalgebra di Hopf Poisson su $U(\mathfrak{g})$, risp. $U(\mathfrak{h})$ (e in effetti è equivalente al dato di una di queste ulteriori strutture algebriche): allora l'accoppiamento di Hopf $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$, risp. $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \rightarrow k$, è anche compatibile con queste ulteriori strutture di Poisson e co-Poisson; una situazione analoga si verifica anche quando si ha a che fare con $F^\infty[G]$, risp. $F^\infty[H]$, invece di $F[G]$, risp. $F[H]$. Così piuttosto che col singolo gruppo di Poisson G si ha a che fare con la coppia (G, H) di gruppi di Poisson duali l'uno dell'altro, descritta in termini algebrici dalla quaterna $(F[G], U(\mathfrak{g}), F[H], U(\mathfrak{h}))$; perciò in un certo senso i tre accoppiamenti $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$, $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \rightarrow k$ e $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow k$ descrivono completamente la “configurazione di Poisson”, perché codificano interamente le relazioni di dualità — di Hopf o di Poisson — tra gli oggetti algebrici associati alla quaterna $(F[G], U(\mathfrak{g}), F[H], U(\mathfrak{h}))$.

Per quantizzazione di G si intende una deformazione ad un parametro (anche quando parleremo di “gruppi quantici multiparametrici”) di una delle suddette strutture algebriche associate a G , cioè o di $U(\mathfrak{g})$ (come coalgebra di Hopf Poisson) oppure di $F[G]$ (come algebra di Hopf Poisson).

Per quanto riguarda il problema generale di costruire una quantizzazione di un qualunque gruppo di Poisson G , esistono due approcci, quello *locale* e quello *globale*.

Il primo approccio consiste nel cercare di quantizzare soltanto il dato *locale* di G , cioè la sua bialgebra di Lie tangente $\mathfrak{g}$; in tal caso il problema generale è stato risolto recentemente — nel Luglio 1995, quando la presente tesi era già compiuta — da Etingof e Kazhdan in [E-K1]; tuttavia la costruzione che essi sviluppano è del tutto formale e pertanto non aiuta a risolvere ulteriori problemi: in particolare non consente di operare specializzazioni alle radici dell'unità, che sono invece particolarmente interessanti perchè legano la teoria dei gruppi quantici alla teoria dei gruppi algebrici in caratteristica positiva.

Una soluzione esplicita è stata ottenuta per le algebre di Lie semisemplici, dotate di una ben nota struttura di bialgebra di Lie (detta “di Sklyanin-Drinfel'd”), mediante una costruzione *ad hoc* introdotta da Drinfel'd, cfr. [Dr3], e — separatamente — da Jimbo, cfr. [Ji], prendendo spunto dalla presentazione di Serre di $U(\mathfrak{g})$; in pratica si definisce

un'algebra di Hopf $U_q^Q(\mathfrak{g})$ su $k(q)$ (dove q è una incognita) per generatori e relazioni, poi si introduce una opportuna $k[q, q^{-1}]$ -forma (cioè “forma intera su $k[q, q^{-1}]$ ”) $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ di $U_q^Q(\mathfrak{g})$, e infine si dimostra che questa è una deformazione di $U(\mathfrak{g})$ come coalgebra di Hopf Poisson. Tale costruzione è stata poi estesa da Reshetikin (cfr. [R]) e da Costantini e Varagnolo (cfr. [C-V1]) fino ad includere una vasta famiglia di strutture di bialgebra di Lie (sulle stesse algebre di Lie semisemplici), ottenendo gruppi quantici multiparametrici $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$.

In altre direzioni, sono state trovate soluzioni specifiche per vari altri casi particolari — in particolare per le bialgebre di Lie di vari gruppi di Poisson di simmetrie particolarmente interessanti in fisica, quali il gruppo di Lorentz, il gruppo di Galilei, il gruppo euclideo, il gruppo di Heisenberg, il gruppo di Newton-Hooke, il gruppo di De Sitter e anti-De Sitter, ecc. — con diversi metodi: o come casi limite della situazione delle algebre di Lie semisemplici (con tecniche di contrazione, cfr. ad esempio [C-G-S-T]) oppure con presentazioni per generatori e relazioni, imitando il caso semisemplice.

Il secondo approccio consiste nel cercare di quantizzare il dato *globale* di G , cioè la sua algebra di Hopf Poisson $F[G]$; tale problema è risolto in [E-K2] utilizzando i risultati e le tecniche in [E-K1], pertanto però si ritrovano tutti gli svantaggi di quel primo lavoro, in particolare la scarsa “concretezza” di una tale soluzione e l'impossibilità di trattare altre questioni, come la specializzazione dei gruppi quantici alle radici dell'unità; il vantaggio della massima generalità si paga dunque con la perdita di praticità.

Al contrario, una soluzione esplicita si può ottenere nel caso dei gruppi connessi semplicemente connessi e semisemplici (con la struttura di Poisson indotta da quella di bialgebra di Lie di $\mathfrak{g}$ di cui sopra): il problema infatti è risolto con un trucco che utilizza la dualità di Hopf tra $F[G]$ e $U(\mathfrak{g})$, sia nel caso uniparametrico che in quello multiparametrico (cfr. tra gli altri [Dr3], [So], [Lu3], [A-P-W], [Jo], [H-L], [D-L], [C-V2], [H-L-T], etc.), dunque basandosi sulla quantizzazione infinitesimale di cui sopra; in effetti si costruisce, tramite un “trucco assiomatico” alla Peter-Weyl, un'algebra di Hopf $F_q^P[G]$ (su $k(q)$) di coefficienti matriciali di $U_q^Q(\mathfrak{g})$, insieme con un accoppiamento di Hopf naturale non degenere $F_q^P[G] \otimes U_q^Q(\mathfrak{g}) \rightarrow k(q)$; poi si definisce una opportuna $k[q, q^{-1}]$ -forma $\mathfrak{F}_P[G]$ di $F_q^P[G]$, che in effetti risulta essere nient'altro che la sottoalgebra di Hopf in $F_q^P[G]$ delle “funzioni” che assumono valori in $k[q, q^{-1}]$ quando “valutate” su (cioè accoppiate con) $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$: in una parola, queste sono le funzioni $k[q, q^{-1}]$ -intere su $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$; infine si dimostra che $\mathfrak{F}_P[G]$ è una deformazione di $F[G]$ come algebra di Hopf Poisson sfruttando il fatto che $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{g})$ sia una deformazione di $U(\mathfrak{g})$ come coalgebra di Hopf Poisson. Questo procedimento si estende poi (cfr. [C-V2]) ai gruppi quantici multiparametrici.

Per i gruppi classici lo stesso risultato è stato ottenuto anche con un altro metodo *ad hoc*, indipendente dall'esistenza di una quantizzazione infinitesimale, e precisamente tramite una presentazione esplicita per generatori e relazioni (cfr. [F-R-T] ed altri) che sfrutta la realizzazione di tali gruppi come gruppi di matrici. Un altro approccio è stato sviluppato per i gruppi classici e altri gruppi di simmetrie particolarmente interessanti in fisica da Woronowicz e altri, cfr. ad esempio [Po-Wo], mentre [Pa-Wa] affronta la quantizzazione dei gruppi lineari.

D'altra parte, nel caso già citato di un gruppo G semisemplice De Concini, Kac e Procesi (cfr. [D-K-P], [D-P]) hanno dimostrato che la soluzione del problema *locale* per G fornisce

anche una soluzione del problema *globale* per il gruppo di Poisson H duale di G (cfr. [D-P], ch. 4), dunque (al variare di G) per una vasta classe di gruppi, sottoclasse della classe dei gruppi risolubili: in effetti si comincia col definire una versione “semplicemente connessa” di $U_q^Q(\mathfrak{g})$ — che qui indichiamo con $U_q^P(\mathfrak{g})$ — e se ne costruisce una opportuna $k[q, q^{-1}]$ -forma $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$, per poi dimostrare che $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ è una deformazione di $F[H]$ come algebra di Hopf Poisson. Anche tale risultato si estende al caso dei gruppi quantici multiparametrici.

A questo punto dobbiamo sottolineare l’insorgenza di un nuovo fenomeno, e cioè un “intreccio di dualità” (la dualità di Hopf e la dualità di Poisson): un oggetto quantico del tipo dell’*algebra involupante* associata ad un gruppo di Poisson fornisce una quantizzazione dell’*algebra delle funzioni* del gruppo di Poisson *duale*: ciò fa balenare l’esistenza, a livello quantistico, di una interrelazione tra dualità di Hopf e dualità di Poisson che “codifichi” in qualche modo la stretta dipendenza che intercorre tra due gruppi di Poisson duali l’uno dell’altro: tale legame di interdipendenza è stato osservato anche, in una certa misura, da Drinfel’d (cfr. [Dr3], §7) e da Majid (cfr. [Ma2], [Ma3]); in effetti poiché un gruppo di Poisson non “vive” da solo ma “in coppia” con il suo duale appare ragionevole pensare che non si debba quantizzare un gruppo di Poisson isolatamente ma piuttosto una coppia di gruppi di Poisson duali, e che dalla quantizzazione ci si possa aspettare una più profonda comprensione della dualità di Poisson.

Alla luce delle osservazioni precedenti è immediato congetturare un risultato duale a quello di [D-P], e cioè che una certa algebra quantica di funzioni $F_q^Q[G]$ associata a G fornisca una quantizzazione (come coalgebra di Hopf Poisson) dell’algebra involupante $U(\mathfrak{h})$ associata ad H ; un risultato di questo tipo completerebbe la quantizzazione della coppia di gruppi di Poisson duali (G, H) , perché avremmo quantizzato tutte e quattro le algebre di Hopf $(F[G], U(\mathfrak{g}), F[H], U(\mathfrak{h}))$ associate a questa coppia. Rifacendoci al risultato di [D-P], consideriamo l’algebra quantica di funzioni $F_q^Q[G]$ duale di $U_q^P(\mathfrak{g})$ (secondo la dualità di Hopf), e prendiamo in esame il “duale” di $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$ dentro $F_q^Q[G]$, che chiamiamo $\mathcal{F}_Q[G]$, definito come l’algebra di Hopf delle funzioni $k[q, q^{-1}]$ -intere su $\mathcal{U}_P(\mathfrak{g})$: la corretta formulazione della congettura allora è che $\mathcal{F}_Q[G]$ sia una quantizzazione della coalgebra di Hopf Poisson $U(\mathfrak{h})$, e un analogo enunciato per il caso multiparametrico. Osserviamo anche che un risultato più debole collegabile a questa congettura è dimostrato in [F-G], ma soltanto per il caso $G = SL(2, k)$.

L’obiettivo iniziale del presente lavoro era ottenere lo scopo ora espresso, cioè costruire $F_q^Q[G]$ e la sua $k[q, q^{-1}]$ -forma $\mathcal{F}_Q[G]$ e dimostrare la precedente congettura: tale scopo è raggiunto con successo (cfr. Teorema 9.5) sviluppando una opportuna dualizzazione del cosiddetto “quantum double” di Drinfel’d. Ma oltre alla congettura già formulata il metodo sviluppato ci dà vari altri risultati, primo fra tutti la costruzione di *nuovi gruppi quantici*, che chiamiamo $U_q^M(\mathfrak{h})$, che stanno ad $U(\mathfrak{h})$ come $U_q^M(\mathfrak{g})$ sta ad $U(\mathfrak{g})$; in particolare abbiamo una forma intera (su $k[q, q^{-1}]$) $\mathfrak{U}_Q(\mathfrak{h})$ che è una quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$ (cfr. Teorema 9.2), e una forma intera $\mathcal{U}_P(\mathfrak{h})$ che è una quantizzazione di $F^\infty[G]$ (cfr. Teorema 9.7). Inoltre esiste un accoppiamento di Hopf tra $U_q^M(\mathfrak{h})$ e $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, che chiamiamo *accoppiamento di Poisson quantico*, che è un analogo quantico degli accoppiamenti di Hopf $F[H] \otimes U(\mathfrak{h}) \rightarrow k$ e $F[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$, $F^\infty[G] \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$ e dell’accoppiamento di bialgebre di Lie $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow k$, e che estende l’accoppiamento (di Hopf) quantico già noto $F_q^P[G] \otimes U_q^Q(\mathfrak{g}) \rightarrow k(q)$; in aggiunta, a livello classico esso fornisce per specializzazione dei *nuovi* interessanti accop-

piamenti $F[G] \times F[H] \rightarrow k$, $F^\infty[G] \times F[H] \rightarrow k$ che rispettano le strutture di Poisson. Come corollario otteniamo una nuova dimostrazione, molto semplice, del risultato di [D-K-P], [D-P], già citato, la cui dimostrazione originale invece è estremamente lunga e complicata (cfr. Teorema 9.3). Infine siamo in grado di estendere tutto questo al contesto generale dei gruppi quantici multiparametrici.

Cambiando punto di vista, ricordiamo che la teoria dei gruppi quantici alle radici dell'unità è strettamente legata a quella dei gruppi algebrici in caratteristica positiva associati a G ; questo fatto è una delle cause di maggior interesse per i gruppi quantici, ed è stato osservato inizialmente da Lusztig (cfr. [Lu1] e [Lu2]), ma emerge anche da [D-K], [D-K-P], [D-P]. Così Lusztig ha introdotto tra l'altro un analogo quantico del morfismo di Frobenius; una costruzione parallela viene fatta anche in [D-P] per il gruppo di Poisson duale H . Nel presente lavoro ci occupiamo anche di questi aspetti, e costruiamo esplicitamente *nuovi morfismi di Frobenius quantici* che sono “in dualità” con quelli già noti rispetto all'accoppiamento di Poisson quantico.

Come abbiamo già detto, i metodi che utilizziamo sono ugualmente efficaci nel caso dei gruppi quantici uniparametrici e di quelli multiparametrici: pertanto i risultati che otteniamo sono validi per tutta la famiglia di coppie di gruppi di Poisson (G^τ, H^τ) che si ottengono modificando la struttura di Sklyanin-Drinfel'd con l'introduzione del parametro τ (cfr. [Re], [C-V1], [C-V2], e [D-K-P], §7.7(c)); in particolare quindi diamo una soluzione del “problema locale” per una vasta classe di gruppi di Poisson risolubili (i gruppi H^τ appunto). Per una maggior chiarezza di esposizione sviluppiamo prima il caso uniparametrico, per il quale il macchinario tecnico da utilizzare è un po' meno pesante; in seguito estendiamo tutto al caso multiparametrico, indicando brevemente le modifiche da apportare al procedimento già visto, che sono poche e non sostanziali.

Spieghiamo ora brevemente la strategia seguita in questo lavoro. L'idea fondamentale è studiare il duale lineare $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})^*$ di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$; poiché $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$ è quoziente del Drinfel'd's double $D(U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-), U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi)$, il suo duale è immerso in $D(U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-), U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi)^*$; dato che $D(U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-), U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi)$ è isomorfo ad un prodotto tensoriale di algebre di Borel quantiche, $D(U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-), U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi) \cong U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+) \otimes U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-)$, per il duale si ha $D(U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-), U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+), \pi_\varphi)^* \cong U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{b}_+)^* \widehat{\otimes} U_{q,\varphi}^Q(\mathfrak{b}_-)^*$; ora, l'esistenza di accoppiamenti di Hopf perfetti tra algebre di Borel quantiche di segno opposto consente di identificare i duali lineari di tali algebre con opportuni completamenti delle algebre con segno opposto: questo ci consente di trovare una presentazione di $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})^*$ per generatori e relazioni — analoga a quella esistente per $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{g})$ — che ci induce a definire $U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{h}) := U_{q,\varphi}^{M'}(\mathfrak{g})^*$ (dove M' dipende da M) e ci consente di ottenere tutti i risultati annunciati; in ragione della loro costruzione chiamiamo i nuovi oggetti — gli $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ — *gruppi formali quantici (multiparametrici)*.

In alternativa alla strategia ora delineata presentiamo anche un altro approccio, in termini di altri nuovi oggetti — indicati con $F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G]$ — che chiamiamo *gruppi quantici (multiparametrici) formali*; la terminologia simile ma *differente* manifesta il fatto che $U_{q,\varphi}^M(\mathfrak{h})$ e $F_{q,\varphi}^{M,\infty}[G]$ forniscono due quantizzazioni *diverse* dei *medesimi* oggetti classici $U(\mathfrak{h}^\tau)$ e $F^\infty[G^\tau]$, le quali prendono spunto da due diversi modi di realizzare $F^\infty[G^\tau]$. In effetti anche questo secondo approccio dà risultati interessanti: precisamente sviluppiamo un modo alternativo di costruire quantizzazioni di $F^\infty[G^\tau]$ e $U(\mathfrak{h}^\tau)$, *diverse* da quelle ottenute per

mezzo dei gruppi formali quantici (multiparametrici). Questo risultato e la sua intrinseca “naturalità” rendono interessante anche il metodo dei gruppi quantici (multiparametrici) formali, sebbene sia più debole — per varie ragioni — di quello dei gruppi formali quantici (multiparametrici); così presentiamo tale metodo alternativo sia per maggior completezza sia anche per favorire, per contrasto, una più profonda comprensione del metodo principale, quello dei gruppi formali quantici (multiparametrici).

Diamo infine una breve “guida alla lettura”.

Il Capitolo I è dedicato a introdurre le nozioni classiche: nel §1 definiamo le strutture algebriche e geometriche di cui parliamo *in generale*, mentre nel §2 definiamo i gruppi di Poisson *particolari* che vogliamo quantizzare.

Il Capitolo II tratta la quantizzazione uniparametrica. I paragrafi da 3 a 6 sono una raccolta di risultati noti, principalmente tratti da [D-L] (non di meno, intervengono alcune modifiche — lievi nella sostanza, ma significative dal punto di vista tecnico — necessarie per presentare in forma coerente risultati tratti da fonti diverse). Nel §3 definiamo le sottoalgebre di Borel quantiche, le loro forme intere, e i ben noti accoppiamenti tra di esse (che qui chiamiamo accoppiamenti DRT); il §4 è dedicato al “quantum double” di Drinfel’d, la cui costruzione è presa da [D-L], §4; nel §5 introduciamo le algebre involuanti universali quantiche (o quantizzate) $U_q^M(\mathfrak{g})$, seguendo [D-L] e [D-P], e richiamiamo i risultati sulla specializzazione delle loro forme intere e l’esistenza di morfismi di Frobenius quantici; nel §6 trattiamo le algebre quantiche di funzioni, traendo definizioni e risultati su $F_q^M[B_\pm]$ e $F_q^M[G]$ da [D-L].

I paragrafi da 7–10 (insieme ai §§12–15 che li estendono al caso multiparametrico) costituiscono la parte originale della presente tesi. Il §7 è il nocciolo del lavoro: usando il linguaggio dei gruppi formali quantici (che introduciamo appositamente), studiamo il duale di $U_q^{M'}(\mathfrak{g})$, immerso nel duale di un quantum double, e miglioriamo vari risultati di [D-L], preparando così il terreno per la parte sostanziale della tesi. Nel §8 assiomatizziamo i risultati del §7 introducendo le algebre involuanti universali quantiche (o quantizzate) $U_q^M(\mathfrak{h})$ e le loro forme intere. Il §9 è dedicato alla specializzazione alle radici dell’unità: in particolare per $q \rightarrow 1$ dimostriamo che i nuovi gruppi quantici $U_q^M(\mathfrak{h})$ forniscono una quantizzazione di $U(\mathfrak{h})$ e di $F^\infty[G]$, dimostriamo che $\mathcal{F}_q[G]$ è una deformazione quantica di $U(\mathfrak{h})$, come congetturato, e proviamo anche che l’accoppiamento di Poisson quantico “quantizza” gli accoppiamenti classici (di Hopf e di Poisson) che caratterizzano una coppia di gruppi di Poisson (o gruppi di Poisson formali) duali l’uno dell’altro, e ne fornisce di nuovi; quando poi $q \rightarrow \varepsilon$ (dove ε è una radice ℓ -esima primitiva dell’unità, con ℓ dispari) costruiamo morfismi di Frobenius quantici $\mathfrak{U}_\varepsilon^Q(\mathfrak{h}) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}_1^Q(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{U}_1^P(\mathfrak{h}) \hookrightarrow \mathfrak{U}_\varepsilon^P(\mathfrak{h})$, $\mathcal{F}_\varepsilon^Q[G] \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1^Q[G]$ analoghi a quelli già noti introdotti in [Lu3], [D-L], [D-P], e di essi “duali” rispetto agli accoppiamenti di Poisson quantici. Infine nel §10 introduciamo i gruppi quantici formali: di essi diamo una presentazione per generatori e relazioni, li confrontiamo con i gruppi formali quantici, e infine dimostriamo vari risultati di specializzazione.

Aggiungiamo inoltre una Appendice che descrive in dettaglio il caso di $G = SL(2, k)$ come esempio illuminante.

Il Capitolo III infine tratta la quantizzazione multiparametrica, imitando procedure e dimostrazioni del Capitolo II: così richiamiamo rapidamente il materiale necessario sui gruppi quantici multiparametrici (tratto principalmente da [C-V1], [C-V2]) e poi adattiamo al caso generale le argomentazioni usate nel Capitolo II, estendendo così i risultati là

esposti. Dunque nel §11 richiamiamo i risultati noti, e nei §§12–15 generalizziamo passo per passo le costruzioni e i risultati dei §§7–10.

References — Bibliografia

- [Ab] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Tracts in Math. **74**, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
- [A-P-W] H. H. Andersen, P. Polo, Wen Kexin, *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1–59.
- [Be] R. Berger, *Géométrie algébrique de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **289** (1979), 583–585.
- [Br] J. Braconnier, *Algèbres de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **284** (1977), 1345–1348.
- [B-V] K. H. Bhaskara, K. Viswanath, *Calculus on Poisson manifolds*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 68–72.
- [Ca] P. Caressa, *Strutture di Poisson su algebre associative e gruppi di Lie*, Tesi di Laurea in Matematica, Università degli studi di Roma “La Sapienza”, a.a. 1992–93.
- [C-G-S-T] E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace, M. Tarlini, *Contractions of quantum groups*, in P. P. Kulish ed., *Quantum Groups*, Lecture Notes in Math. **1510**, 221–244.
- [C-V1] M. Costantini, M. Varagnolo, *Quantum double and multiparameter quantum group*, Comm. Alg. **22** (15) (1994), 6305–6321.
- [C-V2] _____, *Multiparameter Quantum Function Algebra at Roots of 1*, to appear in Math. Ann.
- [D-D] I. Damiani, C. De Concini, *Quantum groups and Poisson groups*, in W. Baldoni, M. Picardello (eds.), *Representations of Lie groups and quantum groups*, Longman Scientific & Technical.
- [Di] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Appl. Math. **20**, M. Dekker inc., New York, 1973.
- [D-K] C. De Concini, V. G. Kac, *Representations of Quantum Groups at Roots of 1*, Colloque Dixmier 1989, Progr. Math. **92** (1990), 471 – 506.
- [D-K-P] C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 151 – 189.
- [D-L] C. De Concini, V. Lyubashenko, *Quantum function algebra at roots of 1*, Adv. Math. **108** (1994), 205 – 262.
- [D-P] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum groups*, in *D-modules, Representation Theory, and Quantum Groups*, L. Boutet de Monvel, C. De Concini, C. Procesi, P. Schapira, M. Vergne (eds.), Lecture Notes in Math. **1565**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.

- [Dr1] V. G. Drinfel'd, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 68–71.
- [Dr2] _____, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254–258.
- [Dr3] _____, *Quantum groups*, Proc. ICM Berkeley 1 (1986), 789–820.
- [D-W] P. Dazord, A. Weinstein (eds.), *Symplectic geometry, groupoids and integrable systems*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **20**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1990.
- [E-K1] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Preprint q-alg@eprints.math.duke.edu (July 24th, 1995).
- [E-K2] _____, *Quantization of Poisson algebraic groups and Poisson homogeneous spaces*, Preprint q-alg@eprints.math.duke.edu (October 20th, 1995).
- [F-G] C. Fronsdal, A. Galindo, *The Dual of a Quantum Group*, Lett. Math. Phys. **27** (1993), 59–71.
- [G-W] V. Ginzburg, A. Weinstein, *Lie-Poisson structures on some Poisson Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 445–453.
- [H-L] T. J. Hodge, T. Levasseur, *Primitive ideals of $\mathbb{C}_q[G]$* , J. Algebra **168** (1994), 455–468.
- [H-L-T] T. J. Hodge, T. Levasseur, M. Toro *Algebraic structure of multi-parameter quantum groups*, Preprint (1994).
- [Ji] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
- [Jo] A. Joseph, *On the prime and primitive spectrum of the algebra of functions on a quantum group*, J. Algebra **169** (1994), 441–511.
- [K-M] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri *Poisson Lie groups and complete integrability*, Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Theor. **49** (1988), 433–460.
- [Ko] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes de Lie Poisson quasitriangulaires*, in Lecture Notes in Math. **1416**, Springer & Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989, 161–177.
- [K-V] L. S. Krasil'sčik, *What is the hamiltonian formalism?*, Russian Math. Surveys **30** (1975), 177–202.
- [Li] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geom. **12** (1987), 253–300.
- [Lu1] G. Lusztig, *Modular representations and quantum groups*, Contemp. Math. **82** (1989), 59–77.
- [Lu2] _____, *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantum groups*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257–296.
- [Lu3] _____, *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata **35** (1990), 89–113.
- [L-W] J.-H. Lu, A. Weinstein *Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decomposition*, J. Differential Geom. **31** (1990), 501–526.

- [Ma1] S. Majid, *Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations*, Pacific J. Math. **141** (1990), 311–332.
- [Ma2] _____, *Quantum and braided Lie algebras*, J. Geom. Phys. **13** (1994), 307–356.
- [Ma3] _____, *Algebras and Hopf algebras in braided categories*, in J. Berger, S. Montgomery (eds.), *Advances in Hopf algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **158** (1994), 55–105.
- [M-M] J. W. Milnor, J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211–264.
- [On] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **20** (1993).
- [Pa] P. Papi, *A characterization of a good ordering in a root system*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 661–665.
- [Pa-Wa] B. Parshall, J. Wang, *Quantum linear groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **89** (1991), n° 439.
- [Po-Wo] P. P. Podles, S. L. Woronowicz, *Quantum Deformation of Lorentz Group*, Commun. Math. Phys. **130** (1990), 381–431.
- [Re] N. Reshetikin, *Multiparameter Quantum Groups and Twisted Quasitriangular Hopf Algebras*, Lett. Math. Phys. **20** (1990), 331–335.
- [Ro1] M. Rosso, *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.
- [Ro2] _____, *Représentations des groupes quantiques*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 744, Astérisque **201–202–203** (1991), 443–483.
- [R-T-F] N. Reshetikin, L. Takhtajan, L. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.
- [Se] M. Semenov-Tian-Šanskij, *Poisson groups and dressing transformations*, J. Soviet Math. **46** (1989), 1641–1657.
- [So] Ya. S. Soibelman, *Algebra of functions on a compact quantum group and its representations*, Leningrad Math. J. **2** (1991), 161–178.
- [Sw] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, New York, 1969.
- [Ta] E. J. Taft, *Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras*, J. Pure and Appl. Math. **87** (1993), 301–312.
- [Tn] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra Isomorphisms, and Universal R-Matrices for Quantum Algebras*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1B (1992), 941–961.
- [Ve] J. L. Verdier, *Groupes quantiques (d’après V. G. Drinfel’d)*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 685, Astérisque **152–153** (1987), 305–319.
- [We1] A. Weinstein, *Poisson structures and Lie algebras*, in *Elie Cartan et les Mathématiques d’aujourd’hui. The Mathematical Heritage of Elie Cartan*, Asterisque (hors série), Société Mathématique de France (1985), 421–434.

[We2] _____, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), 523–577.

[We3] _____, *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki, exp. n° 789, Astérisque **227** (1995), 389–409.