

# INTERESSI SCIENTIFICI

di Fabio Gavarini

Ultimo aggiornamento: 5 Novembre 2024

---

## Linee di ricerca

I miei interessi scientifici sono stati centrati fino ad oggi sulla teoria delle rappresentazioni, le teorie di Lie e la loro quantizzazione: algebre di Lie, gruppi di Lie, gruppi algebrici e loro rappresentazioni, teoria degli invarianti, spazi omogenei, teorie quantistiche, ecc. In questo ambito molto vasto, la mia attività di ricerca si è concentrata su tre filoni principali: gruppi algebrici e loro rappresentazioni, gruppi quantici, algebre di Hopf e loro generalizzazioni. Qui di seguito abbozzo un breve sunto dei miei risultati su tutto questo proposito (*N.B.*: le sigle alfanumeriche tra parentesi quadre si riferiscono all'elenco di pubblicazioni che segue).

**Gruppi Algebrici, Rappresentazioni e argomenti correlati:** Nel vasto contesto della teoria dei gruppi algebrici e dei suoi aspetti di teoria delle rappresentazioni, mi sono principalmente concentrato su due filoni principali: teoria degli invarianti classica, e teoria dei supergruppi (algebrici).

Teoria degli Invarianti Classica: Nella teoria degli invarianti per gruppi classici un ruolo centrale è coperto dalla dualità di Schur-Brauer-Weyl. Essa lega le rappresentazioni irriducibili di un tale gruppo alle rappresentazioni irriducibili dell'algebra  $A(m)$  centralizzante dell'azione del gruppo stesso su  $V^{\otimes m}$ , dove  $V$  è la rappresentazione naturale (su  $\mathbf{C}$ ) del gruppo. Per  $GL(V)$  o  $SL(V)$ , l'algebra  $A(m)$  è un quoziente dell'algebra di gruppo del gruppo simmetrico su  $m$  elementi; rappresentando quest'ultimo come insieme di grafi, e il suo prodotto come "composizione grafica", si ottiene una descrizione combinatoria di  $A(m)$ . Nel caso dei gruppi ortogonali o simplettici invece,  $A(m)$  è quoziente della cosiddetta *algebra di Brauer*, che ha per base un semigruppato di grafi che estende il gruppo simmetrico, ed ammette ancora una opportuna descrizione combinatoria. Questa teoria ormai da un secolo è di centrale importanza nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi classici, e torna ciclicamente all'attenzione degli specialisti del settore per il suo intrinseco interesse e perché (da lunga data) vari problemi classici sono ancora irrisolti.

In questo contesto, l'articolo [2] utilizza la dualità di cui sopra per studiare il sottomodulo  $T^k(V^{\otimes m})$  dei tensori di valenza  $k$  in  $V^{\otimes m}$ ; comprendere la struttura di tale spazio era proprio uno dei problemi irrisolti di cui sopra. Il risultato in [2] è una descrizione di  $T^k(V^{\otimes m})$  come rappresentazione indotta, per l'algebra di Brauer, da una rappresentazione più semplice. Come sottoprodotto questa descrizione, essenzialmente combinatoria, fornisce una nuova dimostrazione della formula di restrizione di Littlewood (per  $m$  abbastanza grande) per descrivere la restrizione a  $SP(V)$ , oppure  $O(V)$ , di un modulo irriducibile per  $GL(V)$ . L'analisi ed i risultati di cui sopra vengono migliorati in [5], dove una descrizione combinatoria più fine dell'algebra di Brauer e dei suoi moduli indecomponibili porta a una nuova dimostrazione di una versione più forte della formula di restrizione di Littlewood,

migliorando in particolare il risultato trovato da Littlewood nel 1944 per il gruppo ortogonale. Con le stesse tecniche in [26] si descrive una gran parte del radicale dell'algebra di Brauer, e parimenti per i suoi moduli indecomponibili.

Supergruppi: In geometria classica, i gruppi di simmetria interessanti sono i gruppi di Lie (nel contesto differenziale) o i gruppi algebrici (nell'ambito algebrico). In supergeometria, essi sono sostituiti dai supergruppi di Lie o algebrici: gli oggetti di entrambi i tipi si possono definire con il linguaggio della topologia (che sottolinea meglio i sottostanti aspetti di geometria classica), o in termini di funtori dei punti (il che si presta meglio a più ampie generalizzazioni). Questi supergruppi sono strettamente legati alle superalgebre di Lie, tramite il super-analogo dei teoremi di Lie che legano i gruppi di Lie e le algebre di Lie nel contesto classico. Nondimeno, lo studio delle superalgebre di Lie in un certo senso più facile — ed è stato sviluppato molto di più — di quello dei supergruppi. In particolare, la classificazione (e la teoria strutturale) dei supergruppi è molto meno avanzata di quella delle superalgebre di Lie: in effetti, anche la costruzione di esempi è ben più problematica.

In questo contesto, con gli articoli [29], [30], [31], [32], [33] e [31-Cor] si muove un passo in direzione di (una specie di) programma di classificazione per i supergruppi algebrici “semplici” (in parole povere). In effetti, in essi si dimostrano teoremi di esistenza per ogni supergruppo algebrico connesso (di dimensione finita) la cui superalgebra di Lie sia semplice. Ricordiamo che tali superalgebre di Lie (semplici, di dimensione finita), la cui classificazione è ben nota, si dividono in due classi: quelle di tipo classico — che sono il superanalogo (in senso opportuno), delle algebre di Lie complesse semplici di dimensione finita, o delle algebre di Kac-Moody affini complesse — e quelle di tipo Cartan.

In dettaglio, negli articoli [29] e [33] si ottiene tale risultato di esistenza per il caso di tipo classico, mediante una costruzione diretta, concreta, che imita quella classica di Chevalley che dà ogni gruppo algebrico connesso semplice la cui algebra di Lie tangente sia semisemplice. In sostanza, si parte da una superalgebra di Lie classica e una sua rappresentazione semplice: i supergruppi algebrici desiderati sono allora ottenuti come sottogruppi (nel supergruppo lineare generale sullo spazio di rappresentazione) generati dai “supersottogruppi ad un parametro” associati ai vettori radice nella superalgebra di Lie stessa. In particolare, questa costruzione fornisce un approccio unificante alla maggior parte dei supergruppi algebrici già noti in letteratura; in più, ciò dà una ricetta esplicita per costruire nuovi esempi. Inoltre, detti supergruppi sono costruiti come “superschemi in gruppo” su  $\mathbf{Z}$ . Invece in [30] — atti di un convegno — si dà una presentazione ragionata sintetica di questa stessa costruzione, e in aggiunta si indica anche come sia possibile estendere ad altri contesti il metodo qui introdotto.

Alcuni “supergruppi di Chevalley” particolari (precisamente quelli di tipo  $D(2, 1; a)$ , ora visti come supergruppi di Lie complessi) sono studiati ancora in [38]. In parole povere, le superalgebre di Lie di tipo  $D(2, 1; a)$  formano una famiglia a un parametro i cui elementi sono (superalgebre di Lie che sono) semplici per tutti i valori del parametro tranne un numero finito: in questo lavoro dimostriamo che la costruzione dei supergruppi di Lie associati ha ancora senso anche per quei valori “singolari”, il che ci porta supergruppi non-semplifici che descriviamo un po' in dettaglio. Questo può essere realizzato in diversi modi (che danno risultati diversi nel caso singolare), di cui cinque sono presentati in dettaglio; nel far questo, confrontiamo anche l'approccio di Scheunert con quello (più ampiamente seguito in letteratura) di Kac.

Successivamente, in [32] si dimostra una specie di risultato inverso di quelli in [29]: precisamente, si dimostra che ogni supergruppo algebrico connesso la cui superalgebra di Lie tangente sia classica necessariamente isomorfo a un supergruppo di Chevalley del tipo considerato in [29].

Con metodi e strategia del tutto analoghi, in [31] si dimostra un analogo teorema di esistenza e unicità — a meno di isomorfismi — per supergruppi algebrici (connessi) la cui superalgebra di Lie tangente sia di tipo Cartan; in particolare, il caso di tipo  $W(n)$  è esaminato un po' più in dettaglio. Lo stesso tema è trattato di nuovo in [31-Cor], dove si corregge un errore in [31] e si chiarisce più in profondità un passaggio chiave della costruzione principale.

In [36] mi occupo del problema più generale di studiare un supergruppo algebrico (affine) tramite la sua super-coppia di Harish-Chandra associata — cioè il dato del suo gruppo algebrico classico soggiacente e la sua superalgebra di Lie tangente. Questo è un tema chiave nella teoria dei supergruppi, che è trattato da vari autori in modi diversi; a mia volta io presento un altro approccio ancora, strettamente legato all'esistenza di “spezzamenti globali” per supergruppi (affini). In poche parole, per una supervarietà questa è la proprietà di spezzarsi in prodotto diretto di una varietà (algebrica) classica e una supervarietà totalmente dispari — in breve, una fattorizzazione globale del tipo “*pari*  $\times$  *dispari*”: sebbene non sia questo il caso per una supervarietà generica (le cose funzionano sempre localmente, ma globalmente possono andar male), è vero però — sotto blande ipotesi — per i supergruppi affini. Lo stesso argomento è trattato di nuovo in [39] e [E3] per supergruppi di Lie (di tipo reale liscio, reale analitico o complesso oloomorfo che siano) invece che supergruppi algebrici: precisamente, si dimostra l'equivalenza di supergruppi di Lie e supercoppie di Harish-Chandra dando due nuovi metodi functoriali per costruire, a partire da una supercoppia di Harish-Chandra assegnata, un supergruppo di Lie opportunamente concepito. Uno di questi due metodi è (essenzialmente) lo stesso che in [36], adattato però al contesto differenziale (con non poche criticità tecniche da gestire); l'altro invece è nuovo — e può essere adattato, viceversa, anche al contesto algebro-geometrico.

In [43] si affronta lo studio delle forme reali — e in particolare di quelle *compatte* (in un senso opportuno) — di superalgebre di Lie e supergruppi complessi, mostrando come la situazione sia in effetti più ricca che nel caso classico: infatti, oltre alla ovvia generalizzazione della nozione di forma reale (dal caso classico al caso super) — detta “standard” — ne esiste una seconda — detta “graduata” — che non ha una diretta controparte classica. In questo senso, il passaggio al contesto super rivela appunto una situazione inaspettatamente più ricca. Lo studio delle coppie simmetriche (a degli annessi superspazi simmetrici) sviluppato in [45] è anch'esso in qualche modo legato a tutto questo.

Su un'altra linea, [46] è invece un lavoro piuttosto “eccentrico”, a sé stante, che tratta la quantizzazione geometrica, in ambito super-Kähler, per i supergruppi di Lie abeliani.

Infine, in [49] si tratta un tema ancora diverso: precisamente, si introduce una classe speciale di superalgebre di Lie (eventualmente con struttura super banale, dunque semplicemente bialgebre di Lie), dette “algebre GaGa”, caratterizzate dall'aver una sottosuperbialgebra (pari) biabeliana che agisce e coagisce diagonalmente, di modo che la superbialgebra stessa si decomponga come somma diretta di sottospazi notevoli (in quanto “spazi peso & copeso”). Per queste particolari superbialgebre di Lie è possibile una descrizione combinatoria molto precisa (“alla Kac–Moody”, diciamo), e la teoria delle deformazioni

— per torsore o per 2–cociclo — è particolarmente interessante: entrambe queste linee di ricerca sono introdotte e sviluppate in questo lavoro. Inoltre, si mostra come molte classi di superbialgebre di Lie ben note rientrino in questo ambito, e quindi possano essere trattate come esempi particolari (non banali!) di algebre GaGa che “esistono in natura”, e così giustificano l’introduzione di una nuova nozione generale che ricomprenda ed estenda tutti questi esempi particolari.

**Gruppi Quantici:** I gruppi quantici sono deformazioni algebriche, nella categoria delle algebre di Hopf, di algebre involuanti universali di algebre di Lie, dette *algebre involuanti universali quantizzate* (nel seguito *QUEA*), o di algebre di funzioni di gruppi algebrici o gruppi di Lie, dette allora *algebre di funzioni quantizzate* (nel seguito *QFA*). Introdotte nel 1985 come “simmetrie quantistiche”, si sono poi rilevati di estremo interesse anche per lo studio dei gruppi algebrici in caratteristica positiva, e loro rappresentazioni, o per la teoria dei nodi ed altro ancora. Inoltre sono intrinsecamente legati alla teoria geometrica che se ne ottiene come limite semiclassico o, viceversa, che essi quantizzano, cioè quella dei gruppi (algebrici o di Lie) di Poisson e delle bialgebre di Lie, e più in generale alla geometria delle varietà di Poisson.

I miei contributi in questo campo si dividono in quattro filoni.

QFA=QUEA: La “equivalenza” tra *QUEA* e *QFA* è un primo filone.

In [0] e [3] a partire dai gruppi quantici più famosi, costruiti sulle algebre di Lie semisemplici, con struttura di Poisson standard sui gruppi associati, introduco gruppi quantici per i gruppi di Poisson duali: il dato di partenza qui sono le *QUEA* di Jimbo (e Drinfeld) e le loro forme intere, ristrette e non ristrette. Prendendo le prime o le seconde corrispondenti limiti semiclassici sono algebre involuanti universali di bialgebre di Lie o algebre di funzioni di gruppi di Poisson rispettivamente: questa è l’idea fondamentale, che si applica anche al caso delle algebre di Hopf duali delle *QUEA* di partenza, dando così i gruppi quantici “duali” di cui sopra. L’analogo di tale lavoro per le algebre di Kac-Moody affini è svolto in [7]; qui la chiave è un teorema tipo Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) per le forme intere ristrette delle *QUEA* affini, che viene formulato e dimostrato in [6].

In [4] si fa una costruzione analoga, dualmente, a quella di [0] e [3], ma più concreta, a partire però dalle *QFA* associate a  $SL(n)$  o  $GL(n)$ , per le quali è ben nota una presentazione per generatori e relazioni tramite “ $q$ –matrici”; un altro risultato in questo lavoro è un teorema PBW per la *QFA* su  $SL(n)$ . Questi risultati vengono migliorati in [23] e [24].

Per il caso di  $SL(n)$ , pensare alla corrispondente *QUEA* come una *QFA* consente di darle una presentazione alternativa: questo è il contenuto di [19], in cui viene data una tale presentazione in termini di “ $q$ –matrici”, fornendo così un approccio alternativo alla presentazione tramite  $L$ –operatori dovuta a Faddeev, Reshetikhin e Takhtajan.

Un altro sviluppo di alcuni aspetti di [4] è l’articolo [25]: in esso si dimostrano alcuni teoremi tipo Poincaré-Birkhoff-Witt per le *QFA* associate a  $Mat(n)$ , a  $GL(n)$  o a  $SL(n)$ , e per le loro specializzazioni alle radici dell’unità. Come corollario, si ottengono anche risultati notevoli sulla struttura di algebra di Frobenius di tali *QFA* alle radici dell’unità.

Infine, un altro sviluppo di tutte queste costruzioni è trattato in [41], dove si prendono in considerazione delle *QUEA* “multiparametriche”, così come le loro forme intere e le loro specializzazioni alle radici dell’unità, con risultati analoghi a quelli già noti nel caso uniparametrico.

QDP: Il *principio di dualità quantico*, nel seguito QDP, è l'idea guida del secondo filone, e spiega i risultati del primo. Nella formulazione originale di Drinfeld, il QDP fornisce una equivalenza di categorie tra le QUEA e le QFA, per gruppi quantici definiti (come algebre di Hopf) su  $\mathbf{k}[[\hbar]]$ , con  $\mathbf{k}$  un campo, e topologicamente completi: in [12] si dà una dimostrazione completa e rigorosa di questo risultato, la prima in letteratura. In [E1] e [22] invece si sviluppa questa idea, formulando una versione più forte del QDP per algebre di Hopf definite su anelli molto generali e senza condizioni topologiche aggiuntive. Precisamente, si dimostra che le ricette di Drinfeld stabiliscono due endofuntori della categoria di tali algebre di Hopf che realizzano una corrispondenza di Galois, in cui detti funtori hanno per immagini la sottocategoria delle QUEA e delle QFA rispettivamente. Inoltre QUEA e QFA sono esattamente le sottocategorie degli oggetti fissati dalla composizione dei due funtori. Data la diversità dei contesti, le tecniche usate in [12] e in [E1], [22] sono molto differenti.

Mentre [E1] è un saggio molto esteso, arricchito con vari esempi e applicazioni, [22] invece è l'articolo su rivista che tratta proprio il risultato principale, centrale di [E1], precisamente il teorema che esprime la versione forte del QDP esposta in precedenza. Sia [9] che [11] — atti di convegni — sono brevi versioni di [E1], ciascuna però corredata di un esempio originale. Invece [E2] — dispense per una scuola estiva — è una presentazione dei risultati di [E1] e [22] tramite numerosi esempi espliciti e applicazioni.

Più in generale, un'applicazione diretta del QDP alle algebre di Hopf definite su un campo dà il principio di dualità cristallino, o CDP in breve. Esso può essere ottenuto anche con mezzi classici — vale a dire, senza coinvolgere i gruppi quantici — di modo che esso può esser visto come un capitolo della teoria classica delle algebre di Hopf. I lavori riguardanti questo tema sono [15], [16] e [17]: per ulteriori dettagli, si veda la sezione CDP in “Algebre di Hopf e strutture correlate” qui sotto. La discussione generale è completata in [47], dove si analizza l'interazione tra il QDP e le procedure di deformazione (nel senso della teoria di Hopf) delle QUEA mediante torsore e mediante 2-cociclo.

Un caso interessante di QDP in contesto infinito-dimensionale è studiato in [42], dove si considera un analogo “continuo” della QUEA (polinomiale e/o formale) associata ad un'algebra di Kac-Moody. In questo contesto non si può applicare direttamente la teoria generale, ma un'analisi diretta permette di ottenere un risultato finale che è del tutto analogo a quello del caso finito-dimensionale.

Uno sviluppo ulteriore è [18], in cui si formula e dimostra un QDP per spazi omogenei, o per sottogruppi corrispondenti. Come applicazione si calcola una quantizzazione esplicita di un'importante struttura di Poisson sullo spazio delle matrici di Stokes; una versione più breve (per una conferenza) di questo lavoro [21], in cui si presentano anche nuove applicazioni ed esempi. In aggiunta, una versione di tale lavoro in termini di gruppi quantici *globali* è sviluppata in [35], dove in più si considerano varie versioni di “quantizzazione” per sottogruppi; si possono allora trattare anche i sottogruppi non-coisotropi, et d'altra parte i nostri risultati mostrano che in definitiva quelli coisotropi hanno necessariamente un ruolo chiave. Infine, si estendono queste idee al contesto degli spazi omogenei *proiettivi*, studiando l'esempio delle varietà di Grassmann in [28] e il caso generale in [27].

In un'altra direzione ancora, studiando deformazioni (per torsore o per 2-cociclo, nel senso della teoria delle algebre di Hopf) di gruppi quantici, in [47] si mostra come il QDP sia la ragione profonda per la quale è possibile introdurre una costruzione di “deformazioni per torsore polare”, rispettivamente per *2-cociclo polare*”, per le QUEA, rispettivamente per le

QFSHA. Questo permette di estendere in modo non banale le usuali costruzioni standard della teoria di Hopf, introducendo così nuovi strumenti per la teoria delle deformazioni dei gruppi quantici.

Infine, in [34] si esplora la possibilità di estendere tutto questo complesso di idee al contesto dei “gruppidi quantici”, cioè quantizzazioni di bialgebroidi: qui la nozione di bialgebroidi è una opportuna generalizzazione di quella di bialgebra, si considera la quantizzazione in senso formale e, a livello semiclassico, le (bi)algebre di Lie sono sostituite dalle (bi)algebre di Lie-Rinehart — a volte dette semplicemente “(bi)algebroidi di Lie”. In particolare, si sviluppa una forma adeguata di QDP per questi oggetti (mostrandola anche “all’opera” in un esempio specifico).

*R-MAT*: *R*-matrici e intrecciamenti sono il tema del terzo filone di ricerca. La nozione di *R*-matrice per una QUEA è la quantizzazione della nozione di *r*-matrice classica per una bialgebra di Lie, che corrisponde a considerare le bialgebre di Lie il cui cobracket sia un cobordo particolare. Più in generale, le algebre di Hopf dotate di *R*-matrice corrispondono, attraverso la dualità di Tannaka-Krein e teoremi di ricostruzione associati, alle categorie monoidali intrecciate, dotate cioè di un analogo del prodotto tensoriale e dell’automorfismo “scambio di fattori” per esso: da questo discende l’interesse di tali algebre nelle teorie di campo conformi o quantistiche, nonché in topologia per la costruzione di invarianti di nodi e di 3-varietà. Una nozione più debole si ottiene sostituendo la *R*-matrice con un opportuno automorfismo dell’algebra di Hopf, detto *intrecciamento*.

Nella mia ricerca sul tema ho applicato il QDP (vedi sopra) alle QUEA dotate di *R*-matrice (dette “quasitriangolari”): il risultato principale è che, data una bialgebra di Lie dotata di *r*-matrice classica (anch’essa detta “quasitriangolare”), si trova un corrispondente geometrico di tale *r*-matrice per il gruppo di Poisson formale duale, così spiegando il rapporto tra *r*-matrici e dualità tra gruppi di Poisson.

In [1], data una QUEA su un’algebra di Lie semisemplice e la sua *R*-matrice standard, estraendo dalla QUEA una QFA (secondo il QDP come in [E1] o in [E2] o in [22]) si dimostra che l’azione aggiunta della *R*-matrice si specializza ad un automorfismo su tale QFA. Inoltre il limite semiclassico di quest’ultimo è un automorfismo birazionale del gruppo di Poisson duale, e precisamente un intrecciamento, in senso geometrico; si estende così un risultato di Reshetikhin per  $SL(2)$ . Tutto ciò viene generalizzato al caso delle algebre di Kac-Moody in [8]. In [10] si fa un’ulteriore estensione, dimostrando che un analogo risultato vale per qualunque QUEA quasitriangolare: qui si applica il QDP come in [12], cioè per gruppi quantici topologici usando direttamente la definizione generale del funtore  $QUEA \rightarrow QFA$  piuttosto che una descrizione esplicita come si ha in [1] e [8].

In [13] si confrontano i risultati di [1] con quelli di Weinstein e Xu, i quali costruiscono un analogo intrecciamento sul duale di un gruppo di Poisson quasitriangolare con metodi puramente geometrici. Il nostro primo risultato è che i due intrecciamenti sono entrambi “infinitesimalmente banali”. Il secondo è che nel caso di  $SL(2)$  tali intrecciamenti coincidono: la dimostrazione segue da una loro descrizione esplicita tramite calcolo diretto.

Infine, in [14] si dimostra che, dato un gruppo di Poisson formale  $G$  quasitriangolare con *r*-matrice classica  $r$ , un intrecciamento ad essa associato sul gruppo di Poisson formale duale  $G^*$  è *unico*: in particolare, quello in [13] e quello di Weinstein e Xu coincidono sempre. Inoltre si precisa la natura di tale intrecciamento, dimostrando che è hamiltoniano, corrispondente ad una certa funzione  $\rho$  su  $G^*$ , che è un “sollevamento” di  $r$  dall’algebra di

Lie cotangente di  $G^*$  all'algebra delle funzioni su  $G^*$  stesso. Di questa  $\rho$  vengono date due costruzioni: nella prima  $\rho$  si ottiene come limite semiclassico del “logaritmo” di una  $R$ -matrice quantistica (riscalata) che quantizzi  $r$ ; nella seconda, si costruisce  $\rho$  direttamente come sollevamento di  $r$  per approssimazioni successive, dove la possibilità di fare il passo  $n$ -esimo è dimostrata con metodi coomologici.

Per concludere, in [47] trattiamo ulteriori costruzioni basate sulle  $R$ -matrici — come anche sulle loro controparti duali, cioè le  $\rho$ -comatrici — che sono standard in teoria delle algebre di Hopf. In concreto, dimostriamo che nel caso dei gruppi quantici (sia QUEA che QFA, nel contesto formale) esse danno in effetti dei risultati molto precisi che coinvolgono ancora una volta il Principio di Dualità Quantico applicato al gruppo quantico in esame. Inoltre, mostriamo anche che tali costruzioni si estendono a un contesto più ampio che utilizza le nozioni più generali di “ $R$ -matrice polare” e “ $\rho$ -comatrice polare”.

Gruppi quantici multiparametrici e deformazioni: I gruppi quantici *multiparametrici* sono gruppi quantici — cioè QUEA oppure QFSA/QFA — che dipendono da più di un parametro: di questi parametri, però, uno solo ha “valore quantico”, mentre gli altri hanno “valore geometrico”. In letteratura, sono stati studiati sia quelli in cui i “parametri geometrici” influiscono soltanto sulla struttura di coalgebra, sia quelli in cui invece influiscono sulla struttura di algebra.

Il primo caso che ho studiato è stato quello di gruppi quantici multiparametrici duali di quelli semisemplici in cui fosse modificata (con parametri “geometrici”) la struttura di coalgebra: i risultati sono riportati in [0] e in [3], che mostrano che in tali gruppi quantici duali i parametri geometrici influenzano invece (dualmente!) la struttura di algebra. Invece in [41] si studiano QUEA multiparametriche (di tipo *polinomiale*) per algebre di Kac-Moody di tipo simmetrizzabile, nelle quali i parametri geometrici influenzano la struttura di algebra. Questo studio è ripreso e approfondito in [40] e in [44], in termini di QUEA di tipo *formale*, e poi è esteso in [48] al caso di *supergruppi* quantici. In tutti questi casi — inclusi anche [0] e [3] — si studiano anche i limiti semiclassici di tali strutture, che sono (super)bialgebre di Lie “multiparametriche” che vengono descritte in dettaglio. Infine in [51] si estende questo studio al caso di QFA per gruppi quantici multiparametrici.

D'altra parte, i gruppi quantici sono particolari algebre di Hopf, e come tali possono essere “deformate” per ottenere nuove algebre di Hopf — e eventualmente, nuovi gruppi quantici; tali deformazioni sono essenzialmente di due tipi, per torsore o per 2-cociclo, la prima cambia la struttura di coalgebra, la seconda quella di algebra. In particolare, tramite tali costruzioni è possibile ottenere gruppi quantici multiparametrici, partendo da gruppi quantici uniparametrici e deformandoli opportunamente (tramite un torsore o un 2-cociclo particolari). Ad esempio, i risultati in [41] si fondano in gran parte su questo tipo di costruzione. Più in generale, il legame tra gruppi quantici multiparametrici e deformazioni è studiato diffusamente in [40], [44], [48] e [51]: precisamente,

(a) in [40] e in [44] si studiano QUEA per gruppi quantici multiparametrici, e le loro deformazioni, dimostrando in particolare che deformazioni per torsore o per 2-cociclo sono (“moralmente”) della stessa natura, in particolare lasciano invariata tale classe di QUEA multiparametriche;

(b) in [48] si estende lo studio fatto in [44] al caso delle QUEA (formali) per *supergruppi* quantici multiparametrici, con risultati del tutto analoghi;

(c) in [51] si sviluppa lo studio analogo a [40] e [44], ma dedicato al caso delle QFA

per gruppi quantici multiparametrici.

Infine, il lavoro [47] analizza metodicamente il tema della costruzione di deformazioni (per torsore o per 2-cociclo) dei gruppi quantici, e del loro effetto sul limite semiclassico: il risultato principale — ispirato dal QDP — è che si possono estendere queste procedure fino a costruire “deformazioni per *torsore polare*” per le QUEA (formali) e “deformazioni per *2-cociclo polare*” per le QFSHA. Questo estende in modo non banale le costruzioni standard della teoria di Hopf, introducendo così nuovi strumenti per la teoria delle deformazioni dei gruppi quantici, nonché per i loro limiti semiclassici.

**Algebre di Hopf e strutture correlate:** La teoria delle algebre di Hopf è un argomento classico che ha guadagnato nuovo interesse negli ultimi venti anni, principalmente grazie ai suoi legami con campi molto diversi come i gruppi quantici, topologia in dimensione bassa, categorie tensoriali, supergeometria, ecc.

I miei contributi a tutto ciò si dividono in tre filoni principali.

CDP: Il *principio di dualità cristallino*, o CDP in breve, è un importante corollario del QDP, ottenuto applicando quest’ultimo alle algebre di Hopf definite su un campo di cui si estendano gli scalari ai polinomi su quel campo. Non di meno, tale risultato può essere conseguito quasi interamente mediante tecniche e strumenti della teoria “classica”, cioè “non quantistica”, delle algebre di Hopf su un campo: si realizza così un nuovo capitolo di teoria “standard”, in cui si associano ad ogni algebra di Hopf (che è una simmetria generalizzata) gruppi di Poisson e bialgebre di Lie (che sono simmetrie geometriche). Questo approccio di tipo “classico” è realizzato in [17]. Una versione sintetica di tale lavoro è [15] (atti di un convegno). Invece [16] è la trattazione esplicita in dettaglio di un importante esempio, un’algebra di Hopf costruita sul gruppo di Nottingham delle serie formali di grado 1, col prodotto di composizione. Questo è soltanto uno tra numerosi esempi di algebre di Hopf costruite su dati combinatori — grafi, alberi, diagrammi di Feynman, ecc. — che si presentano naturalmente in (co)omologia, geometria non commutativa e fisica quantistica; perciò risulta particolarmente istruttivo come “toy model” di situazioni più generali.

Strutture quasitriangolari (e generalizzazioni): Una classe molto speciale di algebre di Hopf è quella in cui — grosso modo — il difetto di cocommutatività è in un certo senso “sotto controllo”. Questa idea è codificata nella nozione di algebra di Hopf quasitriangolare e nelle sue diverse generalizzazioni. Ho studiato questo argomento in una serie di lavori — [1], [8], [10], [13], [14] e [47] — in cui le algebre di Hopf in esame sono tutte gruppi quantici: per maggiori dettagli, si veda la sezione R-MAT in “Gruppi Quantici” qui sopra.

Generalizzazioni (algebre quasi-Hopf, superalgebre di Hopf, ecc.): Ci sono svariate generalizzazioni delle algebre di Hopf: tra di esse, io considero i casi delle *algebre quasi-Hopf* e delle *superalgebre di Hopf*. Nel primo caso, si indebolisce l’assioma di coassociatività; nel secondo, si considerano algebre di Hopf nella categoria dei *superspazi* (cio, spazi  $\mathbf{Z}_2$ -graduati) *vettoriali* — o supermoduli su un anello — di modo che i prodotti tensoriali devono essere maneggiati in modo diverso.

Lo studio delle *algebre quasi-Hopf* è diventato molto importante grazie ai lavori di Drinfeld nella seconda metà degli anni ’80 del secolo scorso. L’ingrediente principale in tale studio è la nozione di “associatore”: grosso modo, quest’ultimo misura il difetto di coassociatività nell’algebra quasi-Hopf. In più, gli associatori hanno dimostrato tutta la



loro importanza anche in altri contesti: ad esempio, per risolvere il problema generale della quantizzazione delle bialgebre di Lie. Di fatto, a tutt’oggi il solo associatore che si conosca è il cosiddetto *associatore KZ*, ottenuto come soluzione dell’equazione differenziale di Knizhnik-Zamolodchikov (rispetto all’omonima connessione su  $\mathbf{C}^n$ ), per il quale era nota — in forma esplicita — soltanto una formula additiva. In [20] si fornisce invece una formula esplicita per il *logaritmo* di tale associatore (come applicazione particolare di un risultato più generale), in termini di  $\zeta$ -funzioni multiple.

Per le superalgebre di Hopf, quelle commutative (in “senso super”) hanno un significato geometrico: precisamente, i loro spettri sono i cosiddetti *supergruppi* algebrici affini, proprio come classicamente i gruppi algebrici affini sono gli spettri delle algebre di Hopf commutative. I miei contributi principali sul tema sono in [29], [30], [31], [32], [33], [36], [31-Cor], [38], [39], [E3] e [43], il cui contenuto è spiegato in dettaglio qui sopra — si veda la sezione *Supergruppi* in “Gruppi Algebrici, Rappresentazioni e argomenti correlati”.

Infine, un’importante estensione della nozione di algebra di Hopf (in effetti, di bialgebra, più precisamente) è quella di *bialgebroidi*: essa ha mostrato un’importanza crescente in diversi ambiti, p.e. in geometria non-commutativa. Comincio a occuparmene in [34], dedicato a studiare le quantizzazioni (in senso formale) dei bialgebroidi. In particolare, in questo lavoro si studiano i funtori che danno dualità lineare tra bialgebroidi (quantici) — qualcosa più o meno già noto — e si introducono dei funtori appropriati, nuovi, “alla Drinfeld” che stabiliscono un QDP per bialgebroidi quantici — il contributo originale (principale) di questo articolo (si veda anche la sezione *QDP* in “Gruppi Quantici” qui sopra). Questi temi vengono approfonditi ulteriormente in [50], dove ci si concentra sulla sottoclasse dei “bialgebroidi di azione”, e tra questi in particolare sui “gruppidi quantici di azione”.

Sempre in questo contesto rientra anche [37], che è dedicato specificamente allo studio della dualità per bialgebroidi con opportuna struttura aggiuntiva.

## — PUBBLICAZIONI —

### Lavori in preparazione

[51] — G. A. García, F. Gavarini, “*Multiparameter quantum function algebras and their deformations*”

[50] — S. Chemla, F. Gavarini, N. Kowalzig, “*Duality functors for action quantum groupoids*”

[49] — G. A. García, F. Gavarini, “*GaGa algebras*”

### Preprints

[48] — G. A. García, F. Gavarini, M. Paolini, “*Multiparameter quantum supergroups, deformations and specializations*” — preprint <http://arxiv.org/abs/2410.22549> [math.QA] (2024), 64 pagine;

[47] — G. A. García, F. Gavarini, “*Quantum group deformations and quantum  $R$ -(co)matrices vs. Quantum Duality Principle*”, 58 pagine (2024) — **N.B.:** versione estesa in <http://arxiv.org/abs/2403.15096> [math.QA] (2024), 72 pagine

[46] — M.-K. Chuah, F. Gavarini, “*Super Kähler structures on the complex Abelian Lie supergroups*” — preprint <http://arxiv.org/abs/2312.00444> [math.DG] (2023), 29 pagine;

[45] — M.-K. Chuah, R. Fiorese, F. Gavarini, “*Admissible Systems and Graded Hermitian Superspaces*”, inviato (2020), 15 pagine.

### Articoli su riviste, atti di convegni, etc.

[44] — G. A. García, F. Gavarini “*Formal multiparameter quantum groups, deformations and specializations*”, Annales de l’Institut Fourier (in stampa), 117 pagine — preprint <http://arxiv.org/abs/2203.11023> [math.QA] (2022);

[43] — R. Fiorese, F. Gavarini, “*Real forms of complex Lie superalgebras and supergroups*”, Communications in Mathematical Physics **397** (2023), no. 2, 937–965 — **DOI:** 10.1007/s00220-022-04502-x ;

[42] — F. Gavarini, “*Quantum duality principle for quantum continuous Kac-Moody algebras*”, Journal of Lie Theory **32** (2022), no. 2, 839–862;

[41] — G. A. García, F. Gavarini, “*Multiparameter quantum groups at roots of unity*”, Journal of Noncommutative Geometry **16** (2022), no. 3, 839–926 — **DOI:** 10.4171/JNCG/471 ;

[40] — G. A. García, F. Gavarini, “*Twisted deformations vs. cocycle deformations for quantum groups*”, Communications in Contemporary Mathematics **23** (2021), no. 8 - 2050084 (56 pagine) — **DOI:** 10.1142/S0219199720500844 ;

[39] — F. Gavarini, “*A new equivalence between super Harish-Chandra pairs and Lie supergroups*”, Pacific Journal of Mathematics **306** (2020), no. 2, 451–485 — **DOI:** 10.2140/pjm.2020.306.451 ;

[38] — K. Iohara, F. Gavarini, “*Singular degenerations of Lie supergroups of type  $D(2, 1; a)$* ”, SIGMA **14** (2018), 137, 36 pagine — vedasi <https://www.emis.de/journals/SIGMA/2018/137/> — **DOI:** 10.3842/SIGMA.2018.137 ;

[37] — S. Chemla, F. Gavarini, N. Kowalzig, “*Duality features of left-Hopf algebroids*”, Algebras and Representation Theory **19** (2016), no. 4, 913–941 — **DOI:** 10.1007/s10468-016-9604-9 ;

[36] — F. Gavarini, “*Global splittings and super Harish-Chandra pairs for affine supergroups*”, Transactions of the American Mathematical Society **368** (2016), 3973–4026 — **DOI:** 10.1090/tran/6456 ;

[35] — N. Ciccoli, F. Gavarini, “*A global quantum duality principle for subgroups and homogeneous spaces*”, Documenta Mathematica **19** (2014), 333–380;

[34] — S. Chemla, F. Gavarini, “*Duality functors for quantum bialgebroids*”, Journal of Noncommutative Geometry (2015), no. 2, 287–358 — **DOI:** 10.4171/JNCG/194 ;

- [33] — F. Gavarini, “*Chevalley supergroups of type  $D(2, 1; a)$* ”, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) **57** (2014), no. 2, 465–491 — DOI: 10.1017/S0013091513000503 ;
- [32] — R. Fiorese, F. Gavarini, “*Algebraic supergroups with Lie superalgebras of classical type*”, Journal of Lie Theory **23** (2013), no. 1, 143–158;
- [31-Cor] — F. Gavarini, “*Corrigendum to Algebraic supergroups of Cartan type*”, Forum Mathematicum **28** (2016), no. 5, 1005–1009 — DOI: 10.1515/forum-2015-0044 — complemento di [31] qui sotto ;
- [31] — F. Gavarini, “*Algebraic supergroups of Cartan type*”, Forum Mathematicum **26** (2014), no. 5, 1473–1564 — DOI: 10.1515/forum-2011-0144  
— • vedasi anche il \*\*\*Corrigendum\*\*\* in [31-Cor] qui sopra!!! • —
- [30] — R. Fiorese, F. Gavarini, “*On the construction of Chevalley supergroups*”, in: S. Ferrara, R. Fiorese, V. S. Varadarajan (eds.), *Supersymmetry in Mathematics and Physics*, UCLA Los Angeles, U.S.A. 2010, Lecture Notes in Mathematics **2027**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011, pp. 101–123 — DOI: 10.1007/978-3-642-21744-9\_5 ;
- [29] — R. Fiorese, F. Gavarini, “*Chevalley Supergroups*”, Memoirs of the American Mathematical Society **215**, no. 1014 (2012), pp. 1–77 — DOI: 10.1155/S1073792803208138 ;
- [28] — R. Fiorese, F. Gavarini, “*Quantum Duality Principle for Quantum Grassmannians*”, in: M. Marcolli, D. Parashar (eds.), *Quantum Groups and Noncommutative Spaces. Perspectives on Quantum Geometry*, 80–95, Aspects Mathematics **E41**, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011 — DOI: 10.1007/978-3-8348-9831-9\_4 ;
- [27] — N. Ciccoli, R. Fiorese, F. Gavarini, “*Quantization of Projective Homogeneous Spaces and Duality Principle*”, Journal of Noncommutative Geometry **2** (2008), no. 4, 449–496 — DOI: 10.4171/JNCG/26 ;
- [26] — F. Gavarini, “*On the radical of Brauer algebras*”, Mathematische Zeitschrift **260** (2008), 673–697 — DOI: 10.1007/s00209-007-0296-z ;
- [25] — F. Gavarini, “*PBW theorems and Frobenius structures for quantum matrices*”, Glasgow Mathematical Journal **49** (2007), no. 3, 479–488 — DOI: 10.1017/S0017089507003813 ;
- [24] — F. Gavarini, Z. Rakić, “ *$F_q[M_n]$ ,  $F_q[GL_n]$  and  $F_q[SL_n]$  as quantized hyperalgebras*”, Journal of Algebra **315** (2007), no. 2, 761–800 — DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.03.040 ;
- [23] — F. Gavarini, Z. Rakić, “ *$F_q[M_2]$ ,  $F_q[GL_2]$  and  $F_q[SL_2]$  as quantized hyperalgebras*”, Communications in Algebra **37** (2009), no. 1, 95–119 — DOI: 10.1080/00927870802241238 ;
- [22] — F. Gavarini, “*The global quantum duality principle*”, Journal für die reine und angewandte Mathematik **612** (2007), 17–33 — DOI: 10.1515/CRELLE.2007.082 ;
- [21] — N. Ciccoli, F. Gavarini, “*Quantum duality principle for coisotropic subgroups and Poisson quotients*”, in: N. Bokan, M. Djoric, A. T. Fomenko, Z. Rakić, B. Wegner,

J. Wess (eds.), *Contemporary Geometry and Related Topics, Proceedings of the Workshop* (Belgrade, June 26–July 2, 2005), EMIS ed., 2006, pp. 99–118 — vedasi anche <http://www.emis.de/proceedings/CGRT2005> ;

[20] — B. Enriquez, F. Gavarini, “*A formula for the logarithm of the KZ associator*”, SIGMA **2**, Vadim Kuznetsov Memorial Issue “Integrable Systems and Related Topics” (2006), Paper 080, 3 pagine — DOI: 10.3842/SIGMA.2006.080 — vedasi anche <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper080> ;

[19] — F. Gavarini, “*Presentation by Borel subalgebras and Chevalley generators for quantum enveloping algebras*”, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) **49** (2006), no. 2, 29–308 — DOI: 10.1017/S0013091504000689 ;

[18] — N. Ciccoli, F. Gavarini, “*A quantum duality principle for coisotropic subgroups and Poisson quotients*”, Advances in Mathematics **199** (2006), no. 1, 104–135 — DOI: 10.1016/j.aim.2005.01.009 ;

[17] — F. Gavarini, “*The crystal duality principle: from Hopf algebras to geometrical symmetries*”, Journal of Algebra **285** (2005), no. 1, 399–437 — DOI: 10.1016/j.jalgebra.2004.12.003 ;

[16] — F. Gavarini, “*Poisson geometrical symmetries associated to non-commutative formal diffeomorphisms*”, Communications in Mathematical Physics **253** (2005), no. 1, 121–155 — DOI: 10.1007/s00220-004-1175-7 ;

[15] — F. Gavarini, “*The crystal duality principle: from general symmetries to geometrical symmetries*”, in: N. Bokan, M. Djoric, Z. Rakić, A. T. Fomenko, J. Wess (eds.), *Contemporary Geometry and Related Topics, Proceedings of the Workshop* (Belgrade, 15–21 May 2002), World Scientific, 2004, pp. 223–249;

[14] — B. Enriquez, F. Gavarini, G. Halbout, “*Uniqueness of braidings of quasitriangular Lie bialgebras and lifts of classical  $r$ -matrices*”, International Mathematics Research Notices **46** (2003), 2461–2486 — DOI: 10.1155/S1073792803208138 ;

[13] — F. Gavarini, G. Halbout, “*Braiding structures on formal Poisson groups and classical solutions of the QYBE*”, Journal of Geometry and Physics **46** (2003), no. 3–4, 255–282 — DOI: 10.1016/S0393-0440(02)00147-X ;

[12] — F. Gavarini, “*The quantum duality principle*”, Annales de l’Institut Fourier **52** (2002), no. 3, 809–834 — DOI: 10.5802/aif.1902 ;

[11] — F. Gavarini, “*On the global quantum duality principle*”, in: Zoran Kadelburg (ed.), *Proceedings of the 10<sup>th</sup> Congress of Yugoslav Mathematicians* (January 21–24, 2001; Belgrade, Yugoslavia), Vedes, Belgrade, 2001, pp. 161–168;

[10] — F. Gavarini, G. Halbout, “*Tressages des groupes de Poisson formels à dual quasi-triangulaire*”, Journal of Pure and Applied Algebra **161** (2001), no. 2, 295–307 — DOI: 10.1016/S0022-4049(00)00099-2 (*disponibile in rete anche in versione inglese*) ;

[9] — F. Gavarini, “*A global version of the quantum duality principle*”, Czechoslovak Journal of Physics **51** (2001), no. 12, 1330–1335 — DOI: 10.1023/A:1013322103870 ;

- [8] — F. Gavarini, “*The R-matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1*”, *Journal of Pure and Applied Algebra* **155** (2001), no. 1, 41–52 — DOI: 10.1016/S0022-4049(99)00117-6 ;
- [7] — F. Gavarini, “*Dual affine quantum groups*”, *Mathematische Zeitschrift* **234** (2000), no. 1, 9–52 — DOI: 10.1007/s002090050502 ;
- [6] — F. Gavarini, “*A PBW basis for Lusztig’s form of untwisted affine quantum groups*”, *Communications in Algebra* **27** (1999), no. 2, 903–918 — DOI: 10.1080/00927879908826468 ;
- [5] — F. Gavarini, “*A Brauer algebra theoretic proof of Littlewood’s restriction rules*”, *Journal of Algebra* **212** (1999), no. 1, 240–271 — DOI: 10.1006/jabr.1998.7536 ;
- [4] — F. Gavarini, “*Quantum function algebras as quantum enveloping algebras*”, *Communications in Algebra* **26** (1998), no. 6, 1795–1818 — DOI: 10.1080/00927879808826240 ;
- [3] — F. Gavarini, “*Quantization of Poisson groups*”, *Pacific Journal of Mathematics* **186** (1998), no. 2, 217–266 — DOI: 10.2140/pjm.1998.186.217 ;
- [2] — F. Gavarini, P. Papi, “*Representations of the Brauer algebra and Littlewood’s restriction rules*”, *Journal of Algebra* **194** (1997), no. 1, 275–298 — DOI: 10.1006/jabr.1996.7003 ;
- [1] — F. Gavarini, “*Geometrical Meaning of R-matrix action for Quantum Groups at Roots of 1*”, *Communications in Mathematical Physics* **184** (1997), no. 1, 95–117 — DOI: 10.1007/s002200050054 ;
- [0] — F. Gavarini, “*Quantizzazione di gruppi di Poisson*”, *Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica*, Università degli Studi di Roma “La Sapienza” (1996).

### Saggi non pubblicati

- [E3] — F. Gavarini, “*Lie supergroups vs. super Harish-Chandra pairs: a new equivalence*”, 47 pagine — vedasi <http://arxiv.org/abs/1609.02844> (2016);
- [E2] — F. Gavarini, “*The global quantum duality principle: a survey through examples*”, in *Proceedings des Rencontres Mathématiques de Glanon – 6<sup>e</sup> édition (1–5/7/2002; Glanon, France)*, 2004, 60 pagine, vedasi <http://arxiv.org/abs/1109.3729> ;
- [E1] — F. Gavarini, “*The global quantum duality principle: theory, examples, and applications*”, 120 pagine, vedasi <http://arxiv.org/abs/math.QA/0303019> (2003).

### Recensioni

No. 77 recensioni di libri e articoli scientifici — tra cui una *Featured Review* — per *Mathematical Reviews* (American Mathematical Society ed.), relativi ai seguenti temi:

Teoria degli Invarianti classica e problemi correlati — Algebra lineare e multilineare: teoria delle matrici — Algebre di Lie, bialgebre di Lie, algebre involuanti universali e

loro rappresentazioni — Categorie monoidali, simmetriche, intrecciate — Gruppi di Coxeter, gruppi di permutazioni, gruppi algebrici, gruppi di Lie, gruppi di Lie-Poisson e loro rappresentazioni — Sistemi hamiltoniani di dimensione finita e infinita, varietà di Poisson di dimensione infinita — Gruppi quantici, gruppi e algebre nelle teorie quantistiche, meccanica quantistica e problema della quantizzazione — Coalgebre, bialgebre, algebre di Hopf e generalizzazioni.

---

---